

## **Математическое моделирование теплообменных процессов в энергосберегающих гелиоустановках**

Р.В. Смирнов, Ю.А. Бахвалов

Интерес к возобновляемым источникам энергии (ВИЭ) неуклонно растет во всем мире из года в год. Обусловлен он не столько возможным истощением ископаемых источников энергии (уголь, нефть, газ), сколько надеждами на экологически безопасное и устойчивое развитие человечества в будущем. В соответствии с Федеральным законом РФ № 261-ФЗ «Об энергосбережении и о повышении энергетической эффективности» в нашей стране также ведутся активные работы в области возобновляемой энергетики. Все более широкие масштабы приобретает использование солнечной радиации, которая является наиболее перспективным и распространённым энергоресурсом для получения тепла [1,2]. По данным [3] в настоящее время в мире используется более 180 млн. м<sup>2</sup> солнечных коллекторов, которые обеспечивают теплоснабжение различных потребителей. Наиболее распространены эти технологии в Китае (59%), на втором месте - Европа (14%). 186 крупных фирм выпускают солнечные коллекторы в 41 стране мира. Природно-климатические юга России, позволяют использовать энергию солнца для покрытия значительной доли потребностей в теплоте.

В летний период большинство районов России вплоть до 65° с.ш. характеризуются высокими значениями среднедневной радиации, в зимнее время количество поступающей солнечной энергии снижается в зависимости от широтного расположения установки в разы [3,4]. КПД солнечных коллекторов зависит от их конструктивных особенностей и климатических факторов [5]. Наиболее широко солнечные воздушные коллекторы применяются в системах отопления зданий и помещений различного назначения, также в сельском хозяйстве [2,3,6].

Несмотря на большое число научных публикаций, посвященных использованию солнечной энергии, исследованиям локальных характеристик коллекторов, учитывающих реальные особенности их функционирования, такие как повышенная степень турбулентности теплоносителя на входе, различные температуры стенок и т. уделяется недостаточное внимание.

Роль математического моделирования в исследованиях и разработках подобного рода очень высока. Это обусловлено как необходимостью более глубокого проникновения в сущность исследуемых объектов, так и целями снижения стоимости и сроков разработок.

Для создания имитационной математической модели авторами был рассмотрен плоский солнечный коллектор с активной циркуляцией теплоносителя (рис.1). Основными конструктивными элементами являются воздушный канал без абсорбера, у которого сторона, обращенная к солнцу, зачерняется, а другая - теплоизолируется. Каркас коллектора изготавливается из прочного и легкого металла, что позволяет снизить его вес и повысить мобильность. В качестве допущений в рассматриваемой далее математической модели будет принято, что внутренняя поверхность коллектора является «черным телом» и не отражает солнечное излучение. Верхняя стенка коллектора прозрачная, выполнена из стекла. Теплоноситель прогоняется через коллектор за счет вентилятора, работающего на фотоэлектрическом преобразователе. Одним из способов уменьшения конвективных тепловых потерь через прозрачное стекло является использование ячеистой структуры, расположенной над поглощающей поверхностью [7]. В настоящей установке не осуществляется рециркуляция, теплоноситель (воздух) единожды прогоняется через коллектор, что упрощает конструкцию установки.

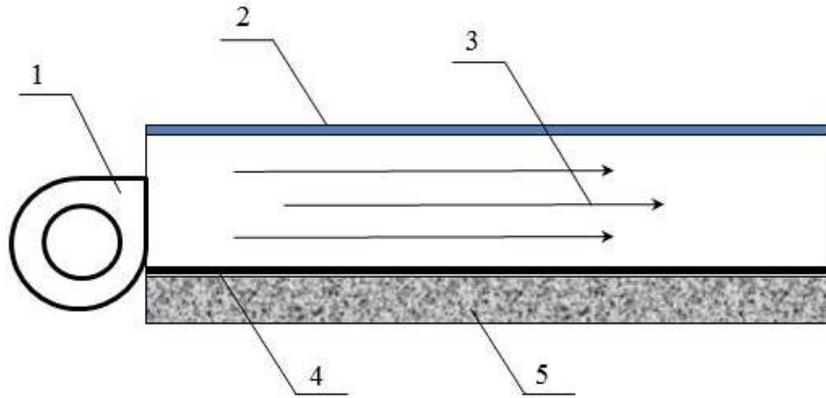


Рис. 1 - Принципиальная схема солнечного коллектора с активной циркуляцией теплоносителя: 1 – нагнетающий вентилятор; 2 – прозрачное стекло; 3 – поток воздуха внутри коллектора; 4 – черное покрытие поглощающей поверхности; 5 – теплоизоляционный слой.

Для формулировки вычислительной задачи и уравнения теплообмена далее будем считать, что воздух – это вязкая и несжимаемая среда. Для построения математической модели, прежде всего, формулируется краевая задача и граничные условия. Помимо этого рассматриваются основные уравнения теплового баланса.

Полные уравнения, описывающие теплообмен в коллекторе, с учетом свободной конвекции имеют вид:

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \beta \cdot \bar{g}(T - T_0) + \tau \Delta \bar{v}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \cdot T = a \Delta T + \frac{1}{c\rho} \cdot q_v, \tag{3}$$

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}. \tag{4}$$

где (1) – уравнение непрерывности ( $\bar{v} \cdot \square = \text{div} \bar{v} = 0$ ); (2) – уравнение движения; (3) – уравнение энергии;  $\bar{v}(u, \tau, w)$  - вектор скорости воздуха в канале;  $T$  - температура в канале;  $p$  - давление, вызываемое движением воздуха;  $\bar{g}$  - вектор ускорения свободного падения;  $\beta$ - коэффициент объемного расширения воздуха;  $\nu$  - коэффициент кинематической вязкости;

$\rho$ - плотность воздуха;  $q_v$ - плотность теплового потока,  $c$  – удельная теплоемкость воздуха ( $\approx 1.005$  Дж/кг),  $\lambda$ - коэффициент теплопроводности воздуха ( $\approx 0.241$  Вт/м<sup>2</sup>),  $(\bar{v} \cdot \nabla)$ - оператор, имеющий вид:

$$(\bar{v} \cdot \nabla) = v \frac{\partial}{x \partial x} + v \frac{\partial}{y \partial y} + v \frac{\partial}{z \partial z};$$

Принимая допущения, рассматриваем двумерную задачу и полагаем процесс стационарным, следовательно, производная по времени равна нулю, скорость воздуха по вертикали  $v = 0$ . Начальный участок в канале мал и профиль скорости в канале известен из классической теории [8] (начальное распределение – парабола) (рис. 2).

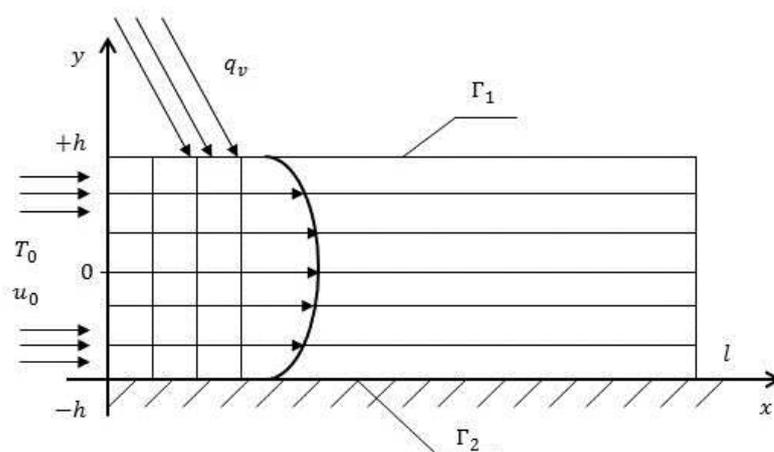


Рис. 2 - Профиль скорости воздуха в коллекторе

В таком случае исходная система уравнений сводится к краевой задаче:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$T(0, y) = T_0$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} = -\alpha(T - T_{окр}) \text{ при } y = 0$$

$$-\lambda \cdot \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = q \text{ при } y = h, \text{ где } u = 6u_0 \left( \frac{y}{h} - \frac{y^2}{h^2} \right) \quad q_1 = q_2$$

где  $q$ - тепловой поток, направленный от верхней стенки к нижней.

Данная система решается одним из численных методов. Для моделирования данного процесса был выбран метод конечных разностей [9,10]. Дифференциальное уравнение в результате преобразований заменяется эквивалентным соотношением в конечных разностях, решение которого сводится к выполнению несложных алгебраических операций. Окончательный результат решения дается выражением, по которому значение «будущего» потенциала (температуры) в данной точке (узле) определяется «настоящим» потенциалом и «настоящим» потенциалом смежных узловых точек. Повторяемость одинаковых операций при расчете полей температуры создает большие удобства для применения современной вычислительной техники, благодаря чему эффективность работы во много раз увеличивается.

За расчётную область возьмем внутреннюю поверхность коллектора, для аппроксимации этой области построим ортогональную сетку и вместо этой области далее рассматриваем совокупность узлов, образованных пересечением линий, параллельных осям координат. На рис. 3 представлена ортогональная сетка и совокупность узлов для расчета распределения температуры в коллекторе. Для задания граничных условий  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с точностью, с которой будет аппроксимировано исходное уравнение, дополним сетку фиктивными узлами, располагая их сверху и снизу от границ  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  на расстоянии  $h_u$ .

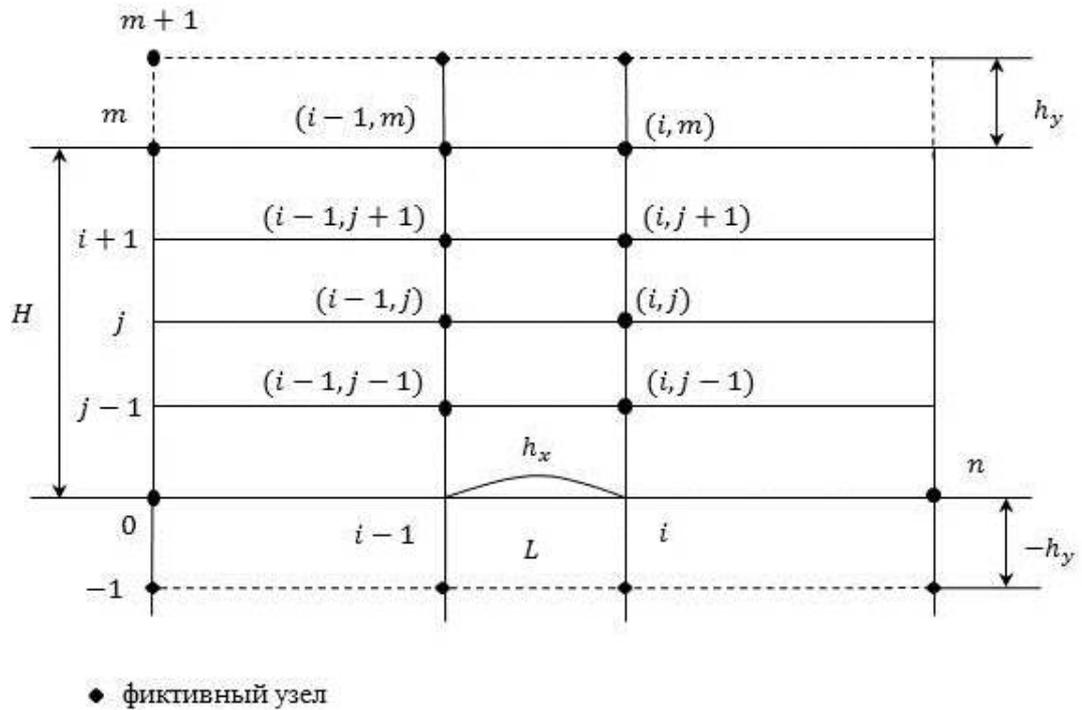


Рис. 3 – Сетка элементов с фиктивными узлами

Искомую функцию распределения температуры  $T(x,y)$  аппроксимируем сеточной функцией, представляющей собой совокупности значений функции в узлах сетки.

Величину размеров  $h_y$  и  $h_x$  соответственно можно рассчитать из следующих соотношений:

$$H_y = \frac{H}{m}; \quad h_x = \frac{L}{n}; \quad u_{i,j} = 6u_0 \left( \frac{y_j}{h_y} - \frac{y_j^2}{h_y^2} \right);$$

Аппроксимацию производных рассмотрим на четырехточечном шаблоне, исходные уравнения перепишем в декартовой системе координат.

Исходное уравнение:

$$u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

Приближенную замену первой и второй производных через разностные отношения можно провести следующим образом:

$$u \frac{\partial T_i}{\partial x} \cong \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_x};$$

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} \approx \frac{1}{h_y} \left( \frac{T_{i+1} - T_i}{h_y} - \frac{T_i - T_{i-1}}{h_y} \right) = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i-1}}{h_y^2}.$$

Заменим частные производные  $\frac{\partial T}{\partial x}$  и  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  в узле 1 через разностные отношения, в результате получаем уравнение в общей форме для  $i = 1$ . В дальнейшем составим подобные уравнения для всех узлов, в которых неизвестны значения искомой функции.

$$6u_0 \left( \frac{y_j}{h_y} - \frac{y_{j-1}^2}{h_y^2} \right) \cdot \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_x} = a \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_y^2};$$

$$i=1 \dots n; j=1 \dots m;$$

Граничные условия представим в виде:

$$\lambda \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2h_y} = -\alpha(T_{i,0} - T_{\text{окр}}); \text{ - для узла } (i, 0)$$

$$-\lambda \frac{T_{i,m} - T_{i,m-1}}{2h_y} = q_1; \text{ - для узла } (i, m).$$

В результате получаем следующую систему уравнений для  $i=1$ :

$$-\lambda \frac{T_{i,m} - T_{i,m-1}}{2h_y} = q_1;$$

$$6u_0 \left( \frac{y_0}{h_y} - \frac{y_0^2}{h_y^2} \right) \cdot \frac{T_{1,0} - T_{0,0}}{h_x} = a \frac{T_{1,1} - 2T_{1,0} + T_{1,-1}}{h_y^2}; \quad i=0, j=0;$$

$$6u_0 \left( \frac{y_1}{h_y} - \frac{y_1^2}{h_y^2} \right) \cdot \frac{T_{1,1} - T_{0,1}}{h_x} = a \frac{T_{1,2} - 2T_{1,1} + T_{1,0}}{h_y^2}; \quad i=1, j=1;$$

$$6u_0 \left( \frac{y_1}{h_y} - \frac{y_2^2}{h_y^2} \right) \cdot \frac{T_{1,2} - T_{0,2}}{h_x} = a \frac{T_{1,3} - 2T_{1,2} + T_{1,1}}{h_y^2}; \quad i=1, j=2;$$

.....

$$6u_0 \left( \frac{y_m}{h_y} - \frac{y_m^2}{h_y^2} \right) \cdot \frac{T_{1,m} - T_{0,m}}{h_x} = a \frac{T_{1,m-1} - 2T_{1,m} + T_{1,m-1}}{h_y^2}; \quad i=1, j=m;$$

$$\lambda \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2h_y} = -\alpha(T_{i,0} - T_{\text{окр}});$$

Совокупность вышенаписанных уравнений в общем виде для узла  $(i,j)$  образуют дискретную математическую модель исходной задачи.

Дальнейшим этапом моделирования является составление алгоритма и написание программного продукта для решения полученной ниже системы линейных алгебраических уравнений. На основании вышеизложенной дискретной математической модели исходной задачи составим алгоритм формирования матрицы коэффициентов и столбца правой части.

Для каждого  $i$ , начиная с  $i=1$ , формируется система линейных алгебраических уравнений, состоящая из  $m+1$  уравнения ( $j=0,1,2\dots m$ ) вида:

$$u_{i,j} \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h_y} = a \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_y^2}; \text{ - для узла } (i,j);$$

Плюс два уравнения, полученных из граничных условий вида:

$$\lambda \frac{T_{i,1} - T_{i,-1}}{2h_y} = -\alpha(T_{i,0} - T_{окр}); \text{ - для узла } (i,0);$$

$$-\lambda \frac{T_{i,m} - T_{i,m-1}}{2h_y} = q_1; \text{ - для узла } (i,m).$$

Полученная система решается методом Гаусса.

Для решения данной системы составлена программа, которая позволяет рассчитывать распределение температуры в канале коллектора. Для этого программой запоминается значение  $T_{1,j}$ , ( $j = 0,1,2 \dots, m$ ), затем переходим к следующему значению  $i$  и так далее до  $i = m$ . В результате получаем массив температур, последний столбец которого – это температура на выходе из коллектора. При  $i=1$ ,  $T_{i-1,j} = T_{0,j}$  ( $j=0,1,2\dots m$ ),  $T_{0,j}$  ( $j=0,1,2\dots m$ ), эти значения заданы при других  $i$  в качестве  $T_{i-1,j}$  ( $j=0,1,2\dots m$ ), принимается значение температуры, полученное на предыдущем шаге.

Кроме того программа учитывает влияние таких параметров как геометрические размеры и компоновка коллектора, мощность солнечной инсоляции, угол наклона коллектора, температура окружающего воздуха и скорость движения воздуха в канале.

Таблица № 1.

## Результаты расчета температур для шагов 0-3

| Параметр<br>сетки x | Параметр сетки y |          |          |          |
|---------------------|------------------|----------|----------|----------|
|                     | 0                | 1        | 2        | 3        |
| 0                   | 0.16598          | 20.58053 | 21.67596 | 23.11328 |
| 1                   | 20               | 20.56817 | 21.67956 | 23.10042 |
| 2                   | 20               | 20.56582 | 21.67262 | 23.08755 |
| 3                   | 20               | 20.56758 | 21.66568 | 23.08504 |
| 4                   | 20               | 20.57717 | 21.66675 | 23.10209 |
| 5                   | 20               | 20.59803 | 21.68298 | 23.14686 |
| 6                   | 20               | 20.63356 | 21.72081 | 23.22661 |
| 7                   | 20               | 20.6783  | 21.78618 | 23.34774 |
| 8                   | 20               | 20.76316 | 21.88466 | 23.51596 |
| 9                   | 20               | 20.86562 | 22.02168 | 23.73628 |
| 10                  | 20               | 20.99992 | 22.20158 | 24.01301 |
| 11                  | 20               | 21.17215 | 22.43265 | 24.34968 |
| 12                  | 20               | 21.38929 | 22.71706 | 24.7489  |
| 13                  | 20               | 21.65912 | 23.06067 | 25.21216 |
| 14                  | 20               | 21.98997 | 23.46767 | 25.73958 |
| 15                  | 20               | 22.39021 | 23.94119 | 26.3297  |
| 16                  | 20               | 22.86737 | 24.48273 | 26.97926 |
| 17                  | 20               | 23.42692 | 25.09163 | 27.68307 |
| 18                  | 20               | 24.0705  | 25.76443 | 28.43392 |
| 19                  | 20               | 24.79362 | 26.49455 | 29.22266 |
| 20                  | 20               | 25.58268 | 27.27204 | ...      |

Как видно из таблицы 1 температура возрастает на всем протяжении коллектора. При помощи разработанной программы можно выполнять расчет для различных начальных условий и получать значения температуры в разных точка коллектора. Варьирование числа шагов позволяет увеличить точность вычислений. Для получения наиболее реалистичных данных о температуре в коллекторе необходимо задавать в качестве исходной величину количества измеренного солнечного излучения на нижней поверхности коллектора, после прохождения излучения через прозрачную поверхность верхней стенки.

Результаты расчета распределения температуры по длине коллектора могут быть также представлены графически (рис. 4). Красной линией обозначено значение температуры на первом шаге работы программы (на входе в коллектор), синей пунктирной линией – в середине коллектора, оранжевой пунктирной линией – на последнем шаге работы программы, т.е. на выходе из коллектора.

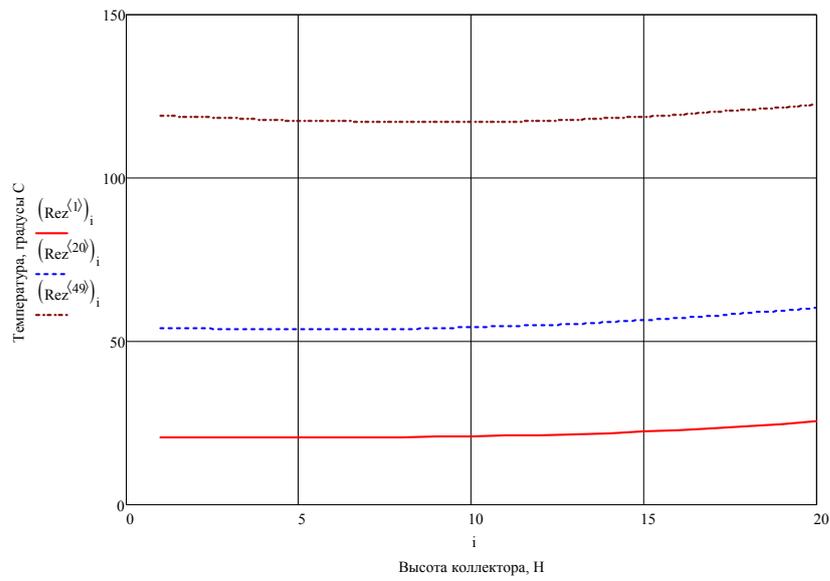


Рис. 4 – Распределение температуры по длине коллектора при нормальных условиях.

В результате построения имитационной математической модели получены данные о распределении температуры внутри коллектора, а также определены температурные характеристики теплоносителя на выходе из коллектора. Помимо этого модель позволяет получить данные о влиянии внешних условий, таких как температура наружного воздуха, мощность солнечной инсоляции, а так же угол наклона коллектора к горизонту и процент тепловых потерь сквозь стенки коллектора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (государственный контракт № 14.516.11.0017).

## Литература

1. Даффи, Дж. А. Основы солнечной теплоэнергетики [Текст] / Дж. А. Даффи, У.А. Бекман. – Долгопрудный: Интеллект. – 2013. – 886 с.
2. Kreith F. Principle of solar engineering [Текст] /F. Kreith, J.F. Kreider. – Washington: Hemisphere Pub. Corp. – 1978. – 778 p.
3. Бутузов В.А. Солнечное теплоснабжение в России: состояние дел и региональные особенности [Электронный ресурс] // Энергосовет, 2011, № 5 (18). – Режим доступа: [http://www.energsovet.ru/bul\\_stat.php?num=18](http://www.energsovet.ru/bul_stat.php?num=18) (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.
4. В.Н. Петренко, Н.В. Мокрова. Разработка системы горячего водоснабжения с использованием возобновляемых источников энергии [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2013, № 2. – Режим доступа [http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD\\_29\\_Petrenko.pdf\\_1617.pdf](http://ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_29_Petrenko.pdf_1617.pdf) (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус.
5. A.Nematian, Ya. Ajabshirchi, A.A. Bakhtiari Experimental analysis of flat plate solar air collector efficiency [Электронный ресурс] // Indian J.of Science and Technology, 2012, V. 5. – P. 3183-3187. – Режим доступа <http://www.indjst.org/index.php/indjst/article/view/30537> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. англ.
6. F. Chabane, N. Moummia, S. Benramachec Experimental analysis on thermal performance of a solar air collector with longitudinal fins in a region of Biskra, Algeria [Электронный ресурс] // J. of Power Technologies, 2013, V. 93(1). – Режим доступа <http://papers.itc.pw.edu.pl/index.php/JPT/article/view/369> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. англ.
7. М.И. Романова, В.В. Шерстюков. Энергоэффективный метод использования излишек тепла солнечного коллектора [Электронный ресурс] // «Инженерный вестник Дона», 2012. - № 4-2. – Режим доступа <http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1440> (доступ свободный) – Загл. с экрана. – Яз. рус
8. Теоретические основы теплотехники. Теплотехнический эксперимент: Справочник [Текст] / Под. общ. ред. Клименко А.В. и Зорина В.М. – М.: Издательство МЭИ, 2001. – 564 с.
9. Бахвалов Ю.А. Математическое моделирование [Текст]: учеб. Пособие для вузов/ Бахвалов Ю.А. – Новочеркасск: ЮРГТУ(НПИ), 2010. – 142с.
10. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. [Текст] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. – М.: Издательство МГУ, 2004. – 799 с.