Моделирование распределительных процессов на основе динамических задач векторной оптимизации

А.А. Золотарев

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Рассматривается динамическая модель непрерывного распределительного процесса, позволяющая на основе дискретизации во времени свести соответствующую обобщенную динамическую задачу к проблеме векторной условной оптимизации. Посредством оптимизации весовых коэффициентов скалярных критериев, инкапсулированных в критериальной свертке на основе обобщенного функционального соотношения, выражающего понимание межкритериального компромисса, показана возможность установления наиболее приемлемых количественных предпочтений между альтернативами. Предлагаемый подход позволяет регуляризировать алгоритмы динамического планирования для однопродуктовых распределительных систем, устранив сложившуюся явную зависимость оптимизационного процесса и результатов принятия многокритериальных решений от экспертных процедур и эвристических факторов.

Ключевые слова: распределительные системы, динамические процессы, математическое моделирование, векторная оптимизация, многокритериальное принятие решений, параметрическая свертка критериев, альтернативы и компромисс.

Введение

Развитие методов многокритериальной оптимизации сложных систем обусловлено необходимостью повышения эффективности их функционирования на основе обобщения и развития принципа межкритериального компромисса, качественно, но лучше количественно отражающего обоснованную значимость каждого критерия с отдельной из оценочных позиций, например: инженерно-технической, экономической, экологической, социальной и других [1 - 4]. В динамично изменяющихся условиях функционирования, эффективные исследования современных систем невозможны без учета фактора времени на основе анализа нестационарных моделей [5 - 7].

Предлагаемый ниже подход моделирования и многоцелевого принятия решений в динамических системах на примере обобщенной задачи ресурсной распределительной оптимизации представим, как непрерывную во времени эволюционную модель, из которой в дальнейшем посредством дискретизации следует задача оптимального многоэтапного планирования.

Постановка задачи

На конечном горизонте планирования продолжительностью $T = t_N - t_0$ для рассматриваемой динамической модели введем время t, изменяющееся в конечных пределах $t_0 \le t \le t_N$ от начального t_0 до конечного ограниченного момента t_N. Дискретизацию непрерывных динамических процессов реализуем на сетке $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots < t_N$, где последовательные смежные моменты дискретного времени связаны соотношением $t_n = t_{n-1} + \Delta t_n$ (n=1,2,..,N) на каждом n-ом временном распределительном этапе производственного процесса продолжительностью Δt_n. Для постоянного значения $\Delta t_n \equiv \Delta t = const$ рекуррентное соотношение связи между дискретными точками времени принимает вид $t_n = t_0 + n\,\Delta t$.

Пусть на рассматриваемом интервале $t \in [t_0, t_N]$ оптимизируемый план выпуска продукции $X(t)$ допускает аппроксимацию $X(t) = X_n / \Delta t = const$, кусочно-постоянную на каждом временном этапе $t \in [t_{n-1}, t_n]$. В этом случае валовой план выпуска продукции $X(t)$ одной номенклатуры связан отношением порядка «$\prec$» с предельно допустимым значением S:

$$\int_{t_0}^{t_N} X(t)\,dt \equiv \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} X(t)\,dt \approx \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{N} X_n (t_n - t_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} X_n \prec S. \qquad (1)$$

Где $\prec$ - один из допустимых знаков множества, т.е. $\prec \in \{<, \le, =, >, \ge\}$.

Аналогично, для мгновенного план-заказа поставки готовой продукции $a(t)$ на каждом этапе $t \in [t_{n-1}, t_n]$ допустимо кусочно-постоянное представление $a(t) = a_n / \Delta t$. Где a_n - объем этапного заказа, обусловленный, например, спросом или сформированным портфелем заказов. Тогда для баланса валового заказа и максимального объема производства S имеет место аналогичное (1) соотношение

$$\int_{t_0}^{t_N} a(t)\,dt \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \prec S\,.$$

Обозначим через $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_k(t)\}_{k=\overline{1,K}} \in \mathrm{R}^K$ весовой вектор с компонентами, количественно характеризующими значимость соответствующей составляющей критериального вектора динамической системы:

$$\mathbf{F}(X(t)) = \{\mathrm{F}_k(X(t))\} \quad (1 \le k \le K) \qquad (2)$$

Тогда осредненные на горизонте планирования $T \equiv t_N - t_0 = N \cdot \Delta t$ взвешенные значения компонент вектора цели (2) примут вид:

$$\sigma_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_N} \theta_k(t)\cdot \mathrm{F}_k(X(t))\,dt \approx \frac{\Delta t}{T}\sum_{n=1}^{N} \theta_k(t_n)\cdot \mathrm{F}_k(X(t_n))\,.$$

Вводя обозначения $\theta_{kn} = \theta_k(t_n),\ F_{kn} = \mathrm{F}_k(X(t_n)) = F_k(X_n)$ и преобразуя, выводим

$$\sigma_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \theta_{kn}\cdot \mathrm{F}_k(X_n)\,.$$

Сводя полученные определяющие соотношения модели и соотношения (2), приходим к постановке задачи векторной однопродуктовой оптимизации с ограничивающими условиями (1), являющейся задачей минимизации осредненного взвешенного вектора целей, т.е.:

$$\Phi_k(\mathbf{X}) \equiv \boldsymbol{\theta}_k^{tr}\cdot \mathrm{F}_k(\mathbf{X}) = \sum_{n=1}^{N} \theta_{kn}\cdot F_k(X_n) \to \min_{\mathbf{X}\in G},\quad k = \overline{1,K} \qquad (3)$$

$$G = \left\{ \mathbf{X} \in \mathrm{R}^N \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbf{X}\cdot\mathbf{I} \equiv \sum_{n=1}^{N} X_n \prec S \\ \mathbf{0} \le \mathbf{L} \le \mathbf{X} \le \mathbf{H} \end{array} \right\};\quad \begin{array}{l} \mathbf{I} = \{1\}_{\overline{1,N}}\,, \\ \mathbf{0} = \{0\}_{\overline{1,N}}\,. \end{array} \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{X}$ - искомый вектор оптимального плана, ограниченный известными значениями $\mathbf{L},\mathbf{H}$ - снизу и сверху, соответственно (в (4) векторное неравенство означает неравенство соответствующих скалярных компонент); $\boldsymbol{\theta}_k^{tr}$ - транспонированный весовой вектор, $\mathrm{F}_k(\mathbf{X})$ - k-ая целевая вектор-функция с этапными составляющими. Ниже дано представление компонент всех векторных величин, рассматриваемых в (3) и (4):

$$\boldsymbol{\theta}_k = \{\theta_{kn}\}_{n=\overline{1,N}}, \ \mathrm{F}_k(\mathbf{X}) = \{F_k(X_n)\}_{n=\overline{1,N}} \ ; \ (k=\overline{1,K}) \quad (5)$$

$$\mathbf{X} = \{X_n\} \in G, \ \mathbf{A} = \{a_n\}, \ \mathbf{H} = \{h_n\}, \quad \mathbf{L} = \{l_n\} \quad (n=\overline{1,N}).$$

Свертка скалярных критериев и условия компромисса

Пусть ограничения (4) не противоречивы, т.е. не пусто $G \neq \varnothing$ множество допустимых решений, а оптимальное решение достигается я в точке $\mathbf{X}_k = \boldsymbol{\xi}_k \in G$ для каждой k-ой скалярной задачи (3) (4), т.е.

$$\min_{\mathbf{X}\in G} \Phi_k(\mathbf{X}) = \Phi_k(\boldsymbol{\xi}_k) = \Phi_k^*, \quad k=\overline{1,K}, \quad (6)$$

причем очевидно, что в общем должно выполняться условие $\xi_i \neq \xi_k, \quad i \neq k$.

Основываясь на методологии «идеальной точки», инкапсулированной в свертке скалярных компонент вектора критериев (3), преобразуем многокритериальную задачу (3),(4) к параметрической оптимизации обобщенной задачи математического программирования [8, 9].

На первом этапе ее анализа введем вектор невязок $\mathbf{r} = \{r_k(\mathbf{X})\}$, с компонентами r_k, характеризующими не достижимость оптимума каждого отдельного критерия $\Phi_k(\mathbf{X})$ в каждой точке области допустимых решений $\mathbf{X} \in G$, следующим образом:

$$\mathbf{r}(\mathbf{X}) \equiv \{r_k(\mathbf{X})\}_{i=\overline{1,K}} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\Phi}^*, \quad r_k = \Phi_k(\mathbf{X}) - \Phi_k^* \quad (7)$$

В указанных обозначениях преобразуем векторную задачу (3),(4) к эквивалентной задаче минимизации среднеквадратичной свертки $\rho(\mathbf{X};\boldsymbol{\omega})$ взвешенных невязок $\mathbf{r}(\mathbf{X})=\{r_k(\mathbf{X})\}_{k=\overline{1,K}}$, как отклонений от Φ_k^*, $(k=\overline{1,K})$ - соответствующих локальных оптимумов (6).

Обозначая через $\mathbf{C}=\{c_k\}$ весовой вектор, окончательно агрегированную однокритериальную задачу представим в виде:

$$\rho(\mathbf{X};\boldsymbol{\omega})=\mathbf{C}\cdot\mathbf{r}^2(\mathbf{X})\to\min_{\mathbf{X}\in G} \tag{8}$$

$$\mathbf{r}^2(\mathbf{X})\equiv\{r_k^{\,2}(\mathbf{X})\}_{k=\overline{1,K}};\quad \begin{cases}\mathbf{C}\cdot\mathbf{I}_c=1;\ \ \mathbf{I}_c=\{1\}_{\overline{1,K}}\\ \quad 0\le c_k\le 1\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\omega}\in\Im=\{\mathbf{C},\boldsymbol{\lambda}\};\ \boldsymbol{\lambda}=\{\mathbf{A},\mathbf{H},\mathbf{L},\boldsymbol{\Theta}\};\ \boldsymbol{\Theta}=\{\theta_{kn}\}\in\mathrm{R}^{K\times N}\,|\theta_{kn}\ge 0$$
$$\mathbf{X}\in G;\quad \mathbf{A},\mathbf{H},\mathbf{L}\in\mathrm{R}^N,\quad \left(k=\overline{1,K};n=\overline{1,N}\right)$$

Область допустимых решений G в (8) определена условиями (4).

Таким образом, показано, что исходная динамическая многокритериальная задача (3) при выполнении ограничений (4) эквивалентна порожденной задаче параметрической оптимизации (8) на множестве параметров-векторов $\boldsymbol{\omega}\in\Im=\{\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{H},\mathbf{L},\boldsymbol{\Theta}\}$ и условий ограничений (4).

Последующий анализ (8) реализуется в два этапа. Вначале определяется параметрическое множество оптимальных решений $\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega})$ задачи условной оптимизации (8) [1, 6], таких что:

$$\rho^*(\boldsymbol{\omega})\equiv\rho(\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega});\boldsymbol{\omega})=\min_{\mathbf{X}\in G}\rho(\mathbf{X};\boldsymbol{\omega}),\ \forall\boldsymbol{\omega}\in\Im$$

Затем формулируется условие параметрического компромисса, на основе которого определяется оптимальное значение параметра $\boldsymbol{\omega}^*\in\Im$.

Такое решения параметрической задачи минимизации агрегированной целевой функции, описывающей общие потери и инкапсулирующей невязки $\mathbf{r}(\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega}))$, характеризующие для каждого значения параметра $\boldsymbol{\omega}$ «неоптимальность» каждого отдельного критерия на параметрическом множестве точке $\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega})$, предложено в виде:

$$r(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I} \cdot \mathbf{r}\left(\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega})\right) \equiv \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} r_k(\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega})) \rightarrow \min_{\boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{I}} \tag{10}$$

Такой результат оптимизации соотношения (10) $\boldsymbol{\omega}^*$ задает параметрическое оптимальное решение $\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega}^*) \in \left\{\mathbf{X}^*(\boldsymbol{\omega})\right\}$, $\forall \boldsymbol{\omega} \in \mathfrak{I}$ исходной многокритериальной задачи, количественно выражая понимание оптимального межкритериального компромисса.

Следует заметить, что в большинстве прикладных задач параметрический вектор $\boldsymbol{\lambda}$, определенный в (8), детерминирован исходя из экономических, технологических или бизнес условий функционирования распределительных систем. В связи с этим, целесообразно проблему поиска $\boldsymbol{\omega}^*$ (10) представить как частную задачу оптимальной параметризации свертки скалярных критериев относительно их весового вектора **C**, т.е.:

$$r(\mathbf{C}) \equiv \mathbf{I} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{X}^*(\mathbf{C})) \equiv \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{K}} r_k(\mathbf{X}^*(\mathbf{C})) \rightarrow \min_{0 \le c_k \le 1} \tag{11}$$

В случае непрерывной зависимости $r(\mathbf{C})$ искомое оптимальное $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$ цможно устанавить на основе необходимых условий экстремума $grad\, r(\mathbf{C}) = \mathbf{0}$, в скалярной форме принимающих вид:

$$\left.\frac{\partial r(\mathbf{C})}{\partial c_k}\right|_{k=\overline{1,K}} \equiv \sum_{j=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{r_k^*} \cdot \frac{\partial}{\partial X_n^*} \Phi_j\left(\mathbf{X}^*(\mathbf{C})\right) \cdot \frac{\partial X_n^*}{\partial c_k} = 0$$

$$\mathbf{X}^* = \left\{X_n^*(\mathbf{C})\right\}_{n=\overline{1,N}}; \quad \mathbf{C} = \{c_k\}_{k=\overline{1,K}}$$

Количественный анализ и параметрическая оптимизация

Для примера рассмотрим вытекающую из общей постановки (3),(4) двухкритериальную $(k=1,2)$ многоэтапную динамическую задачу, с целевыми функциями дохода $\Psi(\mathbf{X})=-\Phi_1(\mathbf{X})$ и потерь $\Phi(\mathbf{X})=\Phi_2(\mathbf{X})$, связанных с отклонениями этапных t_n объемов выпуска продукции $X_n=X(t_n)$ от плана a_n (портфеля заказов), т.е.

$$\varPhi(\mathbf{X})=\left(\sum_{n=1}^{N} c_n\ (a_i-X_n)^2\right)^{1/2}\to\min_{\mathbf{X}\in G},\quad \varPsi(\mathbf{X})=\sum_{n=1}^{N}\theta_n\ X_n\to\max_{\mathbf{X}\in G} \tag{11}$$

Тогда на основании (9), обозначая $\mathbf{C}=\{c_1,c_2\}$; $c_1=\alpha$, $c_2=1-\alpha$ (где α – параметр взвешивания), агрегированная свертка скалярных критериев (11) принимает вид

$$R(\mathbf{X},\alpha)=\left(\alpha\, r_1^2(\mathbf{X})+(1-\alpha)\, r_2^2(\mathbf{X})\right)^{1/2}\to\min_{\alpha;\mathbf{X}\in G},\quad 0\le\alpha\le1 \tag{12}$$

$$r_1(\mathbf{X})=\varPhi(\mathbf{X})-\varPhi^*,\ r_2(\mathbf{X})=\varPsi^*-\varPsi(\mathbf{X});\ \min_{\mathbf{X}\in G}\varPhi(\mathbf{X})=\varPhi^*,\ \max_{\mathbf{X}\in G}\varPsi(\mathbf{X})=\varPsi^*$$

Численный эксперимент позволил выделить закономерности оптимальной параметризации критериальной свертки (12) на основе реализации детерминированных методов и эвристических алгоритмов оптимизации (Particle Swarm Optimization, Нелдера-Мида) [10 - 11].

Характерное поведение параметрической зависимости функции «потерь» $r(\alpha)$ представлено на рис. 1 для двухэтапной задачи. Здесь, соответствующее условию (10) минимизации потерь [12]

$$\min_{0\le\alpha\le1} r(\alpha)=r(\mathbf{X}^*(\alpha^*))\equiv r(\alpha^*),\ \ r(\alpha)=r_1(\mathbf{X}^*(\alpha))+r_2(\mathbf{X}^*(\alpha)),$$

оптимальное по параметру α решение $\mathbf{X}^*$=$\mathbf{X}^*(\alpha^*)$ отмечено как точка $\mathbf{X}^*$ на параметрической траектории оптимальных решений $\mathbf{X}^*(\alpha)$ критериальной свертки $R(\mathbf{X},\alpha)$ (12).

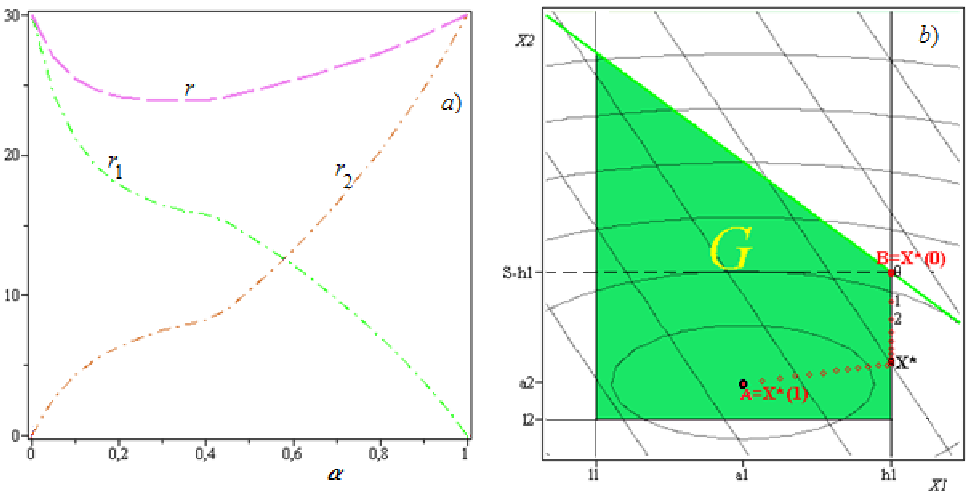

Рис. 1 – Параметрическая зависимость потерь $r(\alpha)$ и оптимальных $\mathbf{X}^*(\alpha)$

На рис. 1 сеткой сплошных линий отображены два семейства изолиний $\Phi(\mathbf{X}) = const$, $\Psi(\mathbf{X}) = const$ целевых функций (11) в виде выпуклых и прямых линий, соответственно. На плоскости X_1OX_2 пронумерованы точки $\{i=0,1,2,\ldots\}$ параметрической последовательности $\mathbf{X}^*(\alpha_i)$ для дискретных изменений $\alpha_i=ih$ с шагом h=0,05 ($0\le\alpha_i\le 1$). Причем, соответствующие α=0 и α=1 крайние точки такой последовательности, обозначенные как **B** и **A,** являются оптимальными для каждого отдельного критерия $\Phi(\mathbf{X})$, $\Psi(\mathbf{X})$, где реализуются их оптимумы Φ^*, Ψ^*.

Соответствующие значения исходных данных и выявленного оптимального решения приведены в таблице.

Таблица

Исходные данные и параметрически оптимальное решение **X***

i	c_i	θ_i	a_i	l_i	h_i	S	α^*	$r(\alpha^*)$	$\mathbf{X}^*(X_1^*, X_2^*)$
1	1/4	2/3	40	10	70	120	0,32	23.844	70
2	3/4	1/3	20	10	150				27,183

Видно, что кривая валовых потерь $r(\alpha)$ при $\alpha=\alpha^*$ имеет явно выраженный минимум (параметрический оптимум), который достигается в граничной точке $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}^*(\alpha^*)$ области G, являющейся точкой излома кусочно-линейной траектории оптимальных $\mathbf{X}^*(\alpha_i)$ задачи (12).

Моделирование в широком диапазоне входных параметров и оптимизация режимов функционирования рассматриваемых динамических систем на основе предложенной параметрической минимизации зависимости суммарных потерь $r(\alpha)$ в случаях более высоких размерностей задач выявили аналогичные закономерности.

Работа выполнена в рамках научного проекта РФФИ №13-01-00943

Литература

1. Золотарев А.А. Математическое моделирование и оптимизация распределительных систем. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2016. 184 с.

2. Munier. A. Strategy for using multicriteria analysis in decision-making. Springer, 2011. 319 p.

3. Розин М.Д., Свечкарев В.П. Проблемы системного моделирования сложных процессов социального взаимодействия // Инженерный вестник Дона, 2012, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/846/.

4. Антонова А.С., Аксенов К.А. Многокритериальное принятие решений в условиях риска на основе интеграции мультиагентного, имитационного, эволюционного моделирования и численных методов // Инженерный вестник Дона, 2012, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1466.

5. Graves S.C., Kletter D.B., Hetzel W.B. A dynamic model for requirements planning with application to supply chain optimization // Operations Research. 1998. Vol.46. No.3. pp. S35-S49.

6. Золотарев А.А. Методы оптимизации распределительных процессов. М.: Инфра-Инженерия, 2014. 160 с.

7. Zolotarev A.A., Agibalov O.I. Abilities of modern graphics adapters for optimizing parallel computing // World Applied Sciences Journal, 2013. Vol.23. No.5. pp. 644-649.

8. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 197 с.

9. Золотарев А.А., Дидковский Д.О. Оптимальная параметризация в задачах распределения ресурсов // Вестник Донского государственного технического университета, 2009. Т.9. ч.2. С. 5-12.

10. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. М.: Физматлит, 2006. 320 с.

11. Золотарев А.А., Венцов Н.Н., Агибалов О.И., Деева А.С. Оптимизация распределительных процессов на основе аналитических методов и эвристических алгоритмов // Вестник науки и образования Северо-Запада России, 2016, Т.2, № 1 URL: vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2016/01/2016-%E2%84%961-%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%B5%D0%B2.pdf.

12. Золотарев А.А. Многофакторная оптимизация распределительных систем. // Сетевое партнерство в науке, промышленности и образовании. Труды Международной мультиконференции. СПб.: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2016. С. 221-228.

References

1. Zolotarev A.A. Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya raspredelitelnyh sistem [Mathematical modeling and optimization of distributive systems]. Saarbrucken: LAP Lambert Academic Publishing, 2016. 184 p.

2. Munier. A. Strategy for using multicriteria analysis in decision-making. Springer, 2011. 319 p.

3. Rozin M.D., Svechkarev V.P. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/846/.

4. Antonova A.S., Aksenov K.A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1466.

5. Graves S.C., Kletter D.B., Hetzel W.B. Operations Research. 1998. Vol. 46. No. 3. pp. S35-S49.

6. Zolotarev A.A. Metody optimizatsii raspredelitelnyh protsessov [Methods of optimization of distributive processes]. Moscow: Infra-Inženerya, 2016. 184 p.

7. Zolotarev A.A., Agibalov O.I. World Applied Sciences Journal, 2013. Vol. 23. No. 5. pp. 644-649.

8. Lotov A.V., Pospelova I.I. Mnogokriterialnye zadachi priniatiya resheniy [Multicriteria problems of decision-making]. Moscow: MAX Press, 2008. 197 p.

9. Zolotarev A.A., Didkosky D.O. Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. 2009. Vol. 9. No. 2. pp. 5-12.

10. Gladkov L.A., Kureichik V.V., Kureichik V.M. Geneticheskie algoritmy [Genetic algorithms]. Moscow: Fizmatllit, 2006. 320 p.

11. Zolotarev A.A., Ventsov N.N., Agibalov O.I., Deeva A.S.. Vestnik nauki I obrazovania severo-zapada Rossii, 2016. Vol. 2. No. 1. URL: vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2016/01/2016-%E2%84%961-%D0%97%D0%BE%D0%BB%D0%BE%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%B5%D0%B2.pdf.

12. Zolotarev A.A. Mezhdunarodnaya multikonferentsiya “Setevoe partnerstvo v nauke, promyshlennosti i obrazovanii”: trudy (International Multi-Conference “Network cooperation in science, industry and education”). St. Petersburg, 2016, pp. 221-228.