

## Исследование структурной модели твердого тела с элементарным объемом в форме полиэдра с помощью конечно-элементного анализа в программном комплексе «ЛИРА-САПР 2017»

*А.С. Жарких, К.А. Цветков*

*Московский государственный строительный университет*

**Аннотация:** В работе рассмотрена структурная модель твёрдого тела. Ю. Н. Малашкиным предложена структурная модель бетона, основной идеей которой является элементарный объём в виде полиэдра, сформированный из стержневых октаэдров. При разработке модели осуществлялся исключительно ее аналитический анализ. В настоящей работе в развитие модели произведён её конечно-элементный анализ в программном комплексе «ЛИРА-САПР». Исследование показало совпадение качественных и количественных параметров модели, полученных при численных и аналитических расчетах, подтвердило ее адекватность применительно к бетону.

**Ключевые слова:** структурная модель, бетон, элементарный объём, полиэдр, стержневой октаэдр, конечно-элементный анализ, программный комплекс «Лира-Сапр».

Как известно, в современной механике конструкционных материалов выделяют три группы теорий прочности [1-3]: феноменологические (классические) [4-6], статистические [7] и структурные [8,9]. В настоящей работе осуществляется численное исследование структурной модели бетона, предложенной профессором Ю. Н. Малашкиным [10].

В рассматриваемой модели элементарный объём твердого тела имеет форму полиэдра на основе стержневого октаэдра. Выбор такой модели был обусловлен тем, что на плоскости именно ромбическая стержневая модель отображает появление взаимосвязанных поперечных и продольных деформаций. Переходя к пространственной форме, была получена модель октаэдра. Такая структурная модель отображает взаимосвязь продольных и поперечных деформаций, а также последовательный характер разрушения. Полиэдр составлен из зерен структуры (зерна заполнителя) и прослоек между зернами (цементно-песчаный камень). Для отображения макроструктуры в вершинах расположены зерна заполнителя. Зерна расположены таким

образом, что на каждую вершину приходится шестая часть объема зерна. На рис.1 зерна показаны затемненными участками.

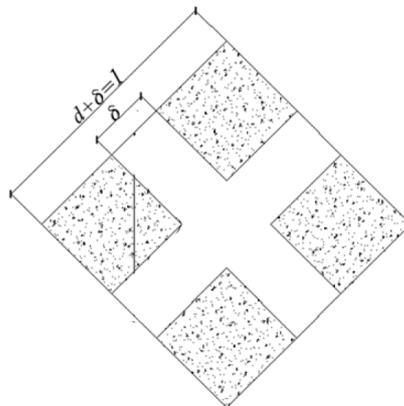


Рис. 1. – Сечение по диагональной плоскости полиэдра

В полиэдрической модели размеры зерна заполнителя ( $d$ ) и прослойки ( $\delta$ ) между ними были определены, исходя из условия равенства относительного содержания компонентов макроструктуры зерна заполнителя и цементно-песчаного камня для бетона в модели и в реальном составе бетона,  $d + \delta = 1$ . Если  $P_3$  — относительное содержание крупного заполнителя в состав бетона, то  $d = \sqrt[3]{P_3}$ .

В упоминаемой работе [10], а также в [11] производился исключительно аналитический анализ работоспособности модели. При этом глубина анализа имела известные ограничения, связанные с объективными сложностями такого метода исследований. Дальнейший анализ работоспособности модели мог бы быть связан с её анализом с использованием современных численных методов, что и предпринято в настоящей статье.

Исследование структурной модели осуществлялось с помощью конечно-элементного анализа в программном комплексе «ЛИРА-САПР 2017».

Для создания модели полиэдра были использованы следующие конечные элементы (КЭ) пространственной задачи теории упругости [Ошибка! Источник ссылки не найден.2]:

- КЭ32 – универсальный конечный элемент;
- КЭ34 – шестиузловой конечный элемент;
- КЭ36 – восьмиузловой конечный элемент.

Полученная конечно-элементная модель элементарного объема твердого тела показана на рис. 2 - 4.

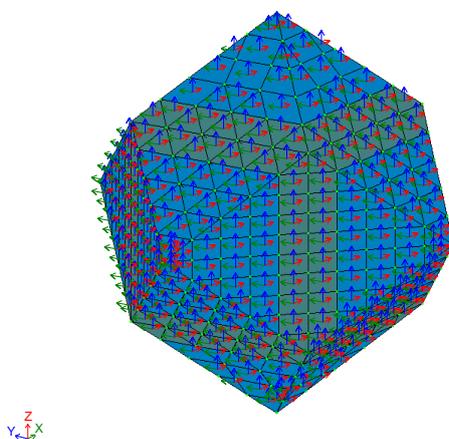


Рисунок 2. – Конечно-элементная модель элементарного объема твердого тела

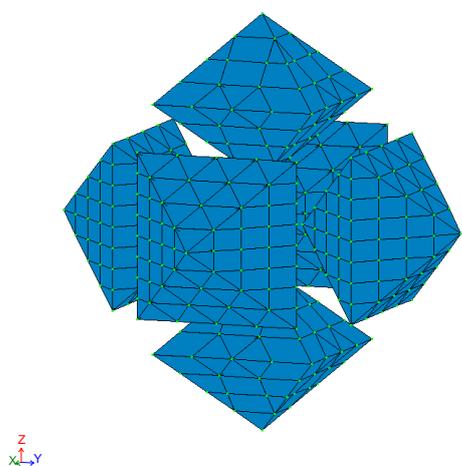


Рисунок 3. – Конечно-элементная модель элементарного объема

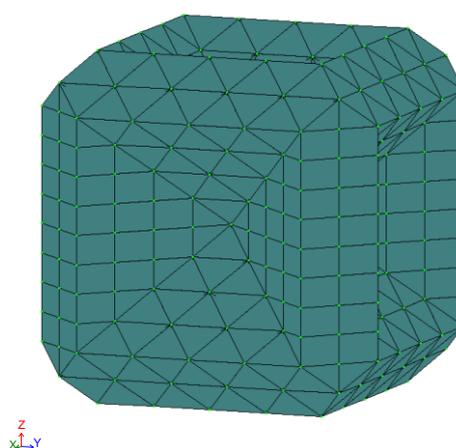


Рисунок 4. – Конечно-элементная модель элементарного объема

твердого тела (КЭ, моделирующие твердого тела (КЭ, моделирующие цементно-песчаный камень условно заполнитель, условно не показаны) не показаны)

Деформативные характеристики элементов для крупного заполнителя и цементно-песчаного камня приняты согласно [13,14]. Используемые жесткости показаны в таблице 1.

Таблица №1

Жесткости элементов

Тип жесткости	Имя	Параметры (жесткости-(МПа), коэффициент Пуассона, расп.вес-(т,м))
1	3D (заполнитель)	$E=50000, \nu=0.2, R_o=0.001$
2	3D (ц/п камень)	$E=22472, \nu=0.2, R_o=0.001$

Модель исследовалась для двух видов воздействия, передаваемого с соседних элементов на элементарный объём: осевого растяжения и осевого сжатия.

**Осевое растяжение.**

Растягивающее усилие можно вычислить по формуле (1):

$$N_p = \frac{2\delta(1 - \delta - tg\beta)\sigma_{\text{цп}}}{(1 - tg\beta)^2 \cos^2 \beta}, \quad (1)$$

где  $\beta$  — угол наклона площадки разрушения ( $\beta=0$ ),  $\delta$  — толщина цементно-песчаной прослойки ( $\delta=0,2$ ).

Согласно [15], прочность контактной зоны составляет от 0,6 до 1,8 МПа или от 0,136 до 0,59 относительно  $\sigma_{\text{цп}}$  при растяжении. Тогда в среднем прочность цементно-песчаного камня составит  $\sigma_{\text{цп}}=3,3$  МПа. Для создания такого напряжения необходимо приложить усилие  $N_p=1056$  кН.

Был произведён конечно-элементный анализ элементарного полиэдра на действие  $N_p$ , приложенной вдоль одной из его диагонали.

Полученные мозаики напряжений в модели твердого тела при осевом

растяжении показаны на рисунках 5 - 6.

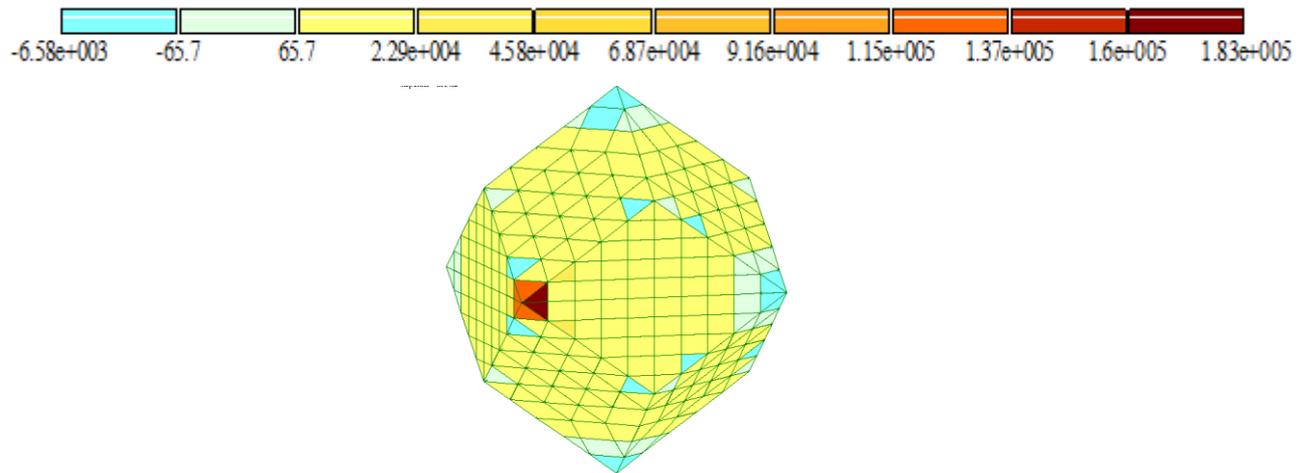


Рисунок 5. – Мозаика напряжений при осевом растяжении  $N_z$  (кН/м<sup>2</sup>)

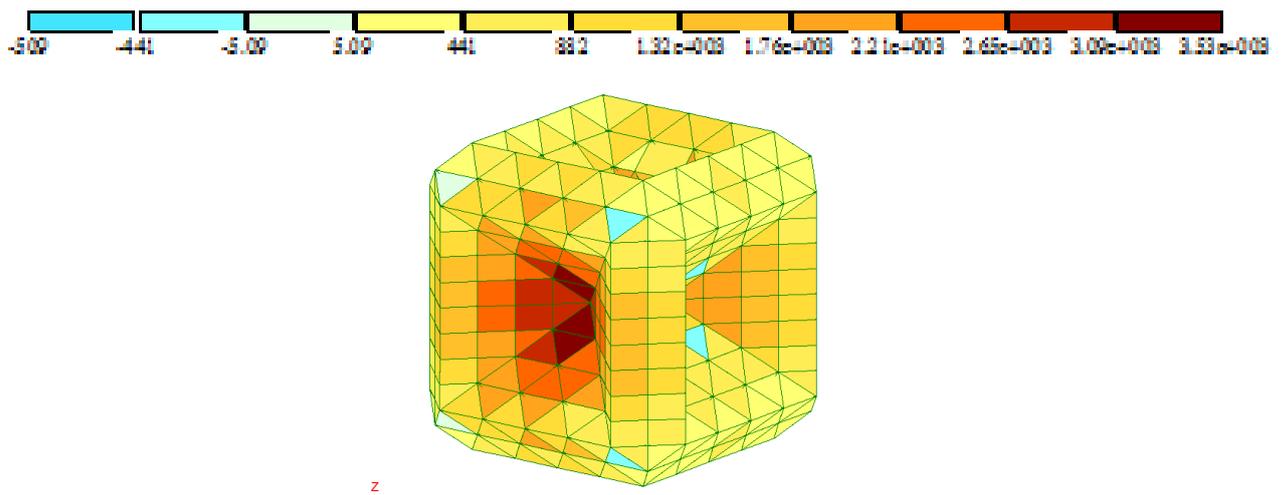


Рисунок 6. – Мозаика напряжений  $N_z$  (кН/м<sup>2</sup>) (цементно-песчаная прослойка)

Анализ мозаики напряжений показывает, что поверхность разрушения при осевом растяжении пройдет частично по контактной зоне, а частично по цементно-песчаной прослойке. При этом можно предположить, что разрушение начнется с цементно-песчаной прослойки в месте ее контакта с зерном заполнителя.

Согласно результатам расчета, максимальное напряжение в цементно-песчаной прослойке составляет  $\sigma_{max}=3,53$  МПа. Таким образом, разница

между прочностью цементного камня и максимальным напряжением составит 7%, что говорит о соответствии конечно-элементной модели аналитическим выражениям, предложенным в [10].

### Осевое сжатие

Растягивающее усилие можно вычислить по формуле (2):

$$N_{p.c.} = \sigma_{\text{шт}} \frac{1-2\delta}{2} \left[ (1-\delta)^2 + \delta^2 \right] + \sigma_{\text{шт}} 2\delta(1-\delta) \quad (2)$$

В нашем случае необходимо приложить растягивающее усилие  $N_p=1729$  кН. Для вычисления значения внешнего сжимающего усилия воспользуемся стержневой моделью октаэдра. При коэффициенте Пуассона  $\nu=0,2$ , модели для двухосного растяжения, при  $\sigma_2=\sigma_3=1729$  кН эквивалентна модель для осевого сжатия при  $\sigma_1=6916$  кН.

Полученные мозаики напряжений в модели твердого тела при осевом сжатии показаны на рисунках 7,8.

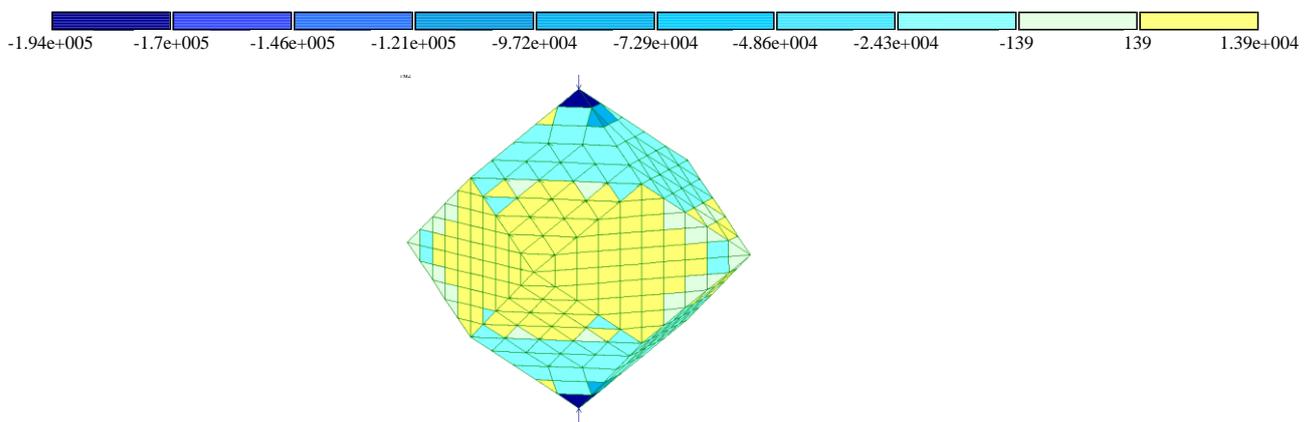


Рисунок 7. – Мозаика напряжений при осевом сжатии  $N_z$  (кН/м<sup>2</sup>)



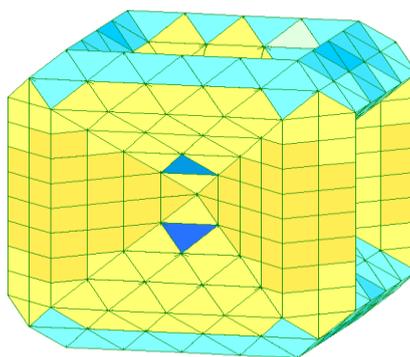


Рисунок 8. – Мозаика напряжений  $N_z$  (кН/м<sup>2</sup>) (цементно-песчаная прослойка)

Разрушение модели при осевом сжатии происходит от растягивающих усилий в направлении, перпендикулярном сжатию. Таким образом, схема разрушения при осевом сжатии оказывается аналогичной схеме при осевом растяжении.

Согласно результатам расчета, максимальное напряжение в цементно-песчаной прослойке составляет  $\sigma_{max}=3,27$  МПа. Таким образом, разница между прочностью цементного камня и максимальным напряжением составит 0,01%, что говорит о соответствии конечно-элементной модели аналитическим выражениям, приведённым в [10].

Модель твёрдого тела с элементарным объёмом в виде полиэдра, скомпонованного из стержневых октаэдров, применительно к бетону протестирована с помощью конечно-элементной модели. В результате было получено качественное и количественное совпадение численных результатов с аналитическими решениями, полученными ранее автором модели.

### Литература

1. Плугин А.Н., Плугин А.А., Калинин О.А., Мирошниченко С.В., Плугин Д.А., Кагановский А.С., Плугин Ал. А., Градобоев О.В., Борзяк О.С. Теория прочности, разрушения и долговечности бетона, железобетона и конструкций из них, том 3. Киев: Наукова думка, 2012. 291 с. с.2.



2. Taylor M.A. General Behaviour Theory for Cement Pastes, Mortars and Concretes //ACI Journal.1971.№10. - pp.756-762.
  3. Kikelbick G. (Editor). Hybrid Materials: Synthesis, Characterization, and Applications. 2007. Wiley, 516 p.
  4. Кадомцева Е. Э., Бескопыльный А. Н. Расчёт на прочность армированных балок с заполнителем из бимодульного материала с использованием различных теорий прочности // Инженерный вестник Дона, 2013, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2125](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2125).
  5. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Муханов А.В. Оптимизация толстостенной сферической оболочки на основе теории прочности Мора // Инженерный вестник Дона, 2013, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1890](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1890).
  6. Корсун В. И., Недорезов А. В., Макаренко С. Ю. Сопоставительный анализ критериев прочности для бетонов // Сучасне промислове та цивільне будівництво. Макіївка: ДонНАБА. 2014. Т. 10, № 1 .С. 65-78.
  7. Потапова Л.Б. Механика материалов при сложном напряженном состоянии. Как прогнозируют предельные напряжения? М.: «Издательство Машиностроение – 1», 2005. 244 с.
  8. Волков С.Д. Статистические теории прочности. М.: Машгиз. 1960.167с.
  9. Десов А.Е. Макроструктурная гипотеза прочности бетона при сжатии и результаты ее экспериментальной проверки // Бетон и железобетон.1972. №7. С.8-12.
  10. Малашкин Ю.Н. Деформирование и разрушение бетона в условиях сложных напряженных состояний: дис. ... докт.техн.наук.01.02.03.М, 1984.443с.
  11. Малашкин Ю.Н. Структурная модель твердого тела в условиях длительного силового воздействия. Теоретические и экспериментальные исследования прочности и жесткости элементов строительных конструкций. // Сб. научных трудов под ред. Варданяна Г.С. М.: МГСУ, 1995.С.27-31.
-



12. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт. 2005. 357 с.
13. Ицкович С.М. Заполнители для бетона. Минск: Высшая школа Стройиздат, 1983. 217 с.
14. Несветаев Г.В., Кардумян Г.С. Влияние собственных деформаций на пористость и свойства цементного камня // Строительные материалы, 2015. С. 38-42.
15. Несветаев Г.В., Ву Л.К. Модель для оценки сцепления цементного камня с заполнителем по величине предела прочности бетона при осевом растяжении // Интернет-журнал «Науковедение» Том 9, №3, 2017. URL: [naukovedenie.ru/PDF/11TVN317.pdf](http://naukovedenie.ru/PDF/11TVN317.pdf).

### References

1. Plugin A.N., Plugin A.A., Kalinin O.A., Miroshnichenko S.V., Plugin D.A., Kaganovskiy A.C., Plugin Al. A., Gradoboyev O.V., Borzyak O.S. Teoriya prochnosti, razrusheniya i dolgovechnosti betona, zhelezobetona i konstruktsiy iz nikh, tom 3 [Theory of strength, destruction and durability of concrete, reinforced concrete and structures made of them, volume 3]. Kiyev: Naukova dumka, 2012. 291 p.
2. Taylor M.A. General Behaviour ACI Jornal.1971. №10. pp.756-762.
3. Kickelbick G. (Editor). Hybrid Materials: Synthesis, Characterization, and Applications. 2007. Wiley, 516 p.
4. Kadomtseva Ye. E., Beskopyl'nyy A. N. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2125](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2013/2125)
5. YAzyyev B.M., Chepurnenko A.S., Mukhanov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2013, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1890](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2013/1890).
6. Korsun V. I., Nedorezov A. V., Makarenko S. YU. Suchasne promislove ta tsivil'ne budivnitstvo. Makiiivka: DonNABA. 2014. T. 10, № 1. pp. 65-78.
7. Potapova L.B. Mekhanika materialov pri slozhnom napryazhennom sostoyanii. Kak prognoziryuyut predel'nyye napryazheniya? [Mechanics of materials under complex



- stress state. How are limit stresses predicted?]. М.: «Izdatel'stvo Mashinostroyeniye - 1», 2005. 244 p.
8. Volkov S.D. Statisticheskiye teorii prochnosti. [Statistical theories of strength]. М.: Mashgiz. 1960.167p.
9. Desov A.Ye. Beton i zhelezobeton.1972. №7. pp. 8-12.
10. Malashkin YU.N. Deformirovaniye i razrusheniye betona v usloviyakh slozhnykh napryazhennykh sostoyaniy [Deformation and destruction of concrete under conditions of complex stress states]: dis. ...dokt.tekhn.nauk.01.02.03.M, 1984.443 p.
11. Malashkin YU.N. Teoreticheskiye i eksperimental'nyye issledovaniya prochnosti i zhestkosti elementov stroitel'nykh konstruktsiy. Sb. nauchnykh trudov pod red. Vardanyana G.S. М.: MGSU, 1995. pp.27-31.
12. Gorodetskiy A.S., Yevzerov I.D. Komp'yuternye modeli konstruktsiy. [Computer models of structures]. Kiev: Fakt. 2005. 357 p.
13. Itskovich S.M. Zapolniteli dlya betona. [Aggregates for concrete]. Minsk: Vysshaya shkola Stroyizdat, 1983. 217 p.
14. Nesvetayev G.V., Kardumyan G.S. Stroitel'nyye materialy, 2015. pp. 38-42.
15. Nesvetayev G.V., Vu L.K. Internet-zhurnal «Naukovedeniye» Tom 9, №3, 2017. URL:naukovedenie.ru/PDF/11TVN317.pdf.