

Формирование фрактальной модели магнитоплазменного электродинамического ускорителя

А. А. Михайлов, С. А. Базуева

Южно-Российский государственный политехнический университет, Новочеркасск

Аннотация: В статье рассмотрены проблемы построения фрактальной модели магнитоплазменного электродинамического ускорителя. Моделирование такой сложной системы определяется как процесс вычисления обобщенного решения уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, описывающих реальные физические процессы в эрeditарных (hereditarity) системах. Исследованы решения данного уравнения, получаемые после обобщения на дробные производные Римана–Лиувилля.

Ключевые слова: магнитоплазменный электродинамический ускоритель (ЭДУ), эрeditарная (hereditarity) модель системы, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, дробные производные Римана–Лиувилля.

Общий анализ объекта исследования

Современные системы высокоскоростного разгона на базе магнитоплазменных электродинамических ускорителей (ЭДУ) [1] представляют собой сложную динамическую многоуровневую систему [2] функционально связанных подсистем, состояния которых характеризуются большим количеством технологических параметров. Примером данных систем является магнитоплазменный электродинамический ускоритель (ЭДУ) с управляемым разгоном объекта управления (рис. 1), который состоит из импульсного источника энергии (ИИЭ), устройство предварительного ускорения (УПУ), рельсотрона (РК) с движущимся плазменным поршнем (ПП) и толкаемым им телом [3].

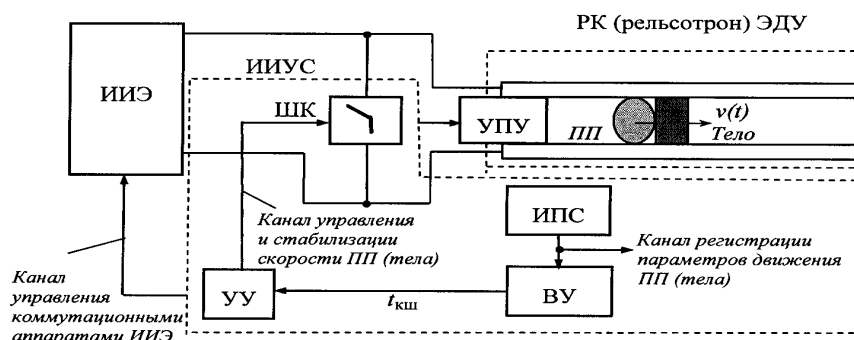


Рис. 1. Структура ИИУС магнитоплазменного ЭДУ с управляемым разгоном

системы (ИИУС), система автоматического управления содержит шунтирующий ключ (ШК), измерительный преобразователь скорости (ИПС), вычислительное устройство (ВУ), устройство управления (УУ) с каналом управления РК и каналом управления коммутаторами ИИЭ. Управление разгоном ПП в ЭДУ заключается в том, что по направляющим РК (рельсам) протекает электрический ток от ИИЭ через подвижную проводящую перемычку в виде ПП, который начально является частью цепи. Созданное током I , идущим через рельсы, магнитное поле B между ними, перпендикулярно току, проходящему через ПП и смежный рельс взаимодействует с током в ПП и порождает электромагнитную силу Лоренца F , разгоняющую электропроводный ПП вдоль рельсов. Ограничение скорости ПП на заданном уровне осуществляется за счет прерывания в определенный момент процесса передачи энергии от ИИЭ к РК путем шунтирования входа рельсотрона с помощью ШК, срабатывающего по сигналу УУ.

Современный инженерный подход для описания состояния динамических систем обычно использует оценки для гауссовского распределения [4], что определяет возможность применения гарантированного (робастного) подхода при формировании модели движения плазмы в ЭДУ в виде системы N обыкновенных дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = f(t, \bar{z}(t), u, \bar{\chi})$$

с начальными условиями:

$$\bar{z}(t_0) = \bar{z}_{0, \text{ном}} + \Delta\bar{z}_0,$$

где $\bar{z}(t)$ – вектор состояния, u – управление, $\bar{\chi} = \bar{\chi}_{\text{ном}} + \Delta\bar{\chi}$ – вектор возмущаемых параметров, $\bar{\chi}_{\text{ном}}$ и $\Delta\bar{\chi}$ – векторы номинальных значений и возмущений параметров процесса ускорения, $\bar{z}_{0, \text{ном}}$ – вектор номинальных начальных условий, $\Delta\bar{z}_0$ – вектор их возмущений.

Однако обычно сумма случайных величин сходится не к гауссовским, а к классу устойчивых распределений «Леви–Парето» с тяжелыми хвостами (фрактальными распределениями, со степенными распределениями или паретианами), выборочные средние которых неустойчивы и малоинформативны [5]. Поэтому подмена распределений «Леви–Парето» при формировании модели динамических систем нормальным законом распределения приводит к тому, что модель в виде винеровского процесса, соответствующее нормальному закону распределения, остается непрерывной, в то время модель, например, в виде процесса Коши, соответствующая распределению Коши из класса распределений «Леви–Парето», время от времени терпит разрывы. В связи с этим приходится использовать математическую модель [5], включающую параметры (координаты) системы, определяющие ее состояние, и закон пространственно-временной эволюции состояний в общем виде, который на основе знаний о состоянии в начальный момент времени t_0 в точке пространства x_0 определяет состояние системы в любой момент времени $t > t_0$. Причем ПП в модели системы задается фрактальной структурой (в том числе и динамической) [6], что определяет переход к эредитарной (*hereditariness*) модели системы [7], для которой при заданной топологии множества состояний часть состояний от их общего числа необратимо теряется в процессе эволюции и становятся недоступными для системы.

Целью статьи является формирование модели ЭДУ в виде эредитарной модели с «остаточной» памятью, описывающей скрытый порядок в системах данного класса.

Выбор концептуальной модели системы

В процессе функционирования динамическая система с полной памятью проходит через все состояния непрерывным образом без потерь и представляется интегралом свертки

$$J(t) = \int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau, \quad (1)$$

который преобразует входной сигнал $f(t)$ в выходной сигнал $J(t)$ с помощью импульсной функции (функции памяти) $k(t)$. Если

$$k(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases}$$

ступенчатая функция, то выражение (1) будет интегралом первого порядка.

В настоящее время для описания функционирования динамических систем различных классов [8–10] широкое распространение получили марковские модели процессов. Система с марковским процессом (с полным отсутствием памяти), заданная вероятностью перехода $P(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1})$ от состояния x_{i-1} к состоянию x_i , которая определяется уравнением Чепмена–Колмогорова–Смолуховского (ЧКС) [11], в процессе эволюции теряет все свои состояния кроме одного с бесконечно большой плотностью. При этом $k(t) = \delta(t)$ –функция Дирака, а преобразование (1) в виде

$$f(t) = \int_0^t \delta(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (2)$$

определяет начальное состояние системы, что можно интерпретировать как интегрирование нулевого порядка. Причем все последующие состояния в системе через плотность вероятности перехода связаны с предыдущими через одно текущее состояние в каждый момент времени t .

Для эредитарных систем [7], занимающих промежуточное место между марковскими системами с полным отсутствием памяти и простыми системами с полной памятью, функция памяти для интеграла свертки (1) интерполируется дробной функцией $k(t) = k_\alpha(t)$ между δ –функцией (интегрирование нулевого порядка) и ступенчатой функцией (интегрирование первого порядка). Причем модель эредитарной системы

определяется топологией множества состояний системы, задаваемой его размерностью, и функцией плотности вероятности перехода.

Оценка размерности множества состояний системы

Для исследования структуры множества S состояний системы $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ ($0=x_0 < x_1 < \dots < x_n$) мощности $l=|X|$ воспользуемся ступенчатой функцией

$$\eta(x_1 < x < x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [x_1, x_2], \\ 0, & \text{если } x \text{ вне } [x_1, x_2], \end{cases} \quad (3)$$

лапласовский образ которой с параметром преобразования Лапласа p равен

$$\eta(x_1 < x < x_2) \rightarrow \frac{1}{p} \exp[-px_1] \{1 - \exp[-p(x_2 - x_1)]\},$$

а для ступенчатой функции (3) на k -й стадии имеет вид

$$\eta(x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)}) \rightarrow \frac{1}{p} \exp[-px_k^{(n)}] \{1 - \exp[-p\Delta_n]\},$$

где $\Delta_n = x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$.

Если повторить этот процесс для $(n+1)$ -го этапа, то получим

$$\begin{aligned} & \eta(x_k^{(n)} < x < x_{k+1}^{(n)} + \Delta_{n+1}) + \eta(x_k^{(n)} + \Delta_n - \Delta_{n+1} < x < x_{k+1}^{(n)} + \Delta_n) \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{p} \exp(-px_k^{(n)}) [1 - \exp(-p\Delta_n)] + \frac{1}{p} \exp(-px_k^{(n)}) \exp[-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})] \times \\ & \times [1 - \exp(-p\Delta_{n+1})] = \frac{1 - \exp(-p\Delta_{n+1})}{p_{(n+1)}} [1 + e^{-p(\Delta_n - \Delta_{n+1})} \exp(-px_k^{(n)})]. \end{aligned}$$

Используя связь $x_k^{(n)} = x_{k+1}^{(n+1)}$ и вновь повторяя эту процедуру, имеем

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \eta(x_k^{(n+1)} < x < x_{k+1}^{(n+1)}) \rightarrow \frac{1}{p} [1 - \exp(-p\Delta_{n+1})] \prod_{k=1}^n \{1 + \exp[-p(\Delta_{k-1} - \Delta_k)]\}. \quad (4)$$

Воспользовавшись при определении Δ_n для функции $f(x)$ (с образом Лапласа $F(p)$) последовательным делением с коэффициентом деления ξ мощности множества состояний l , имеем $\Delta_n = \xi^n l$, а из (2) для совокупности ступенчатых функций

$$J(x) = \frac{1}{(2\xi)^N l} \int_0^x dx \sum_{m=1}^{2^N} \eta(x_m^{(N)} < x < x_{m+1}^{(N)}) f(x),$$

для которого, используя (4), имеем

$$J(x) \rightarrow \Phi(p) = \frac{1 - \exp(-pl\xi^N)}{pl\xi^N} Q_N(pl(1-\xi)) F(p), \quad (5)$$

где

$$Q_N(z) = 2^{-N} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + \exp(-z\xi^n)] \text{ с } z = pl(1-\xi). \quad (6)$$

Для относительно больших N ($N \gg 1$), $|pl\xi^N| \ll 1$ из (5) следует

$$\Phi(p) = Q_N(z) F(p). \quad (7)$$

Из выражения (6) следует

$$Q_N(z) = \frac{[1 + \exp(-z\xi^{N-1})]}{2} Q_{N-1}(z),$$

причем $Q_N(z)$, определенное выражением (6), удовлетворяет также уравнению [12]:

$$Q_N(z/\xi) \cong 1/2 Q_{N-1}(z). \quad (8)$$

При $N \rightarrow \infty$ существует предел $Q_N(z)$. Используя неравенство $0 < |\exp(-pl\xi^n(1-\xi))| < 1$, можно принять, что для любого pl ($0 < |pl| < \infty$)

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(z) = \bar{Q}(z) < 1.$$

Поэтому в пределе уравнение (8) преобразуется к виду

$$\bar{Q}(z/\xi) = 1/2 \bar{Q}(z),$$

решение которого [12] имеет вид $\bar{Q}(z) = A_v z^{-v}$, откуда $A_v (z/\xi)^{-v} = \frac{1}{2} A_v z^{-v}$ и после логарифмирования имеем $v = \ln 2 / \ln(1/\xi)$ (9) – размерность множества состояний [12].

Причем если параметры ξ_i случайные и имеют вид $\xi_i = \bar{\xi} + \delta_i$ со случайными отклонениями δ_i от среднего $\bar{\xi}$, то $\bar{\xi} = n^{-1} \sum_i \xi_i$, $|\bar{\xi} - \xi_i| = |\delta_i| \ll \bar{\xi} < 1$, то [12] в формулах необходимо сделать замену $\xi \rightarrow \bar{\xi}$, где

$\bar{\xi} = \left(\exp \left[\frac{\langle \delta \rangle}{\xi} - \frac{\langle \delta^2 \rangle}{2\xi^2} + \dots \right] \right) \xi$, $\langle \delta^s \rangle = n^{-1} \sum_i \delta_i^s$ ($s=1, 2, \dots, m$) – средние значения множества $\{\delta_i\}^i$.

При этом минимальное значение предельного интервала состояния $\Delta_i = \Delta \times \xi^i$ при оценивании размерности Δ множества S состояний $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$ не превышает заданное значение погрешности δ_i оценивания параметра ξ .

Определение условий для функции плотности вероятности перехода

Чтобы найти закономерность в поведении системы необходимо знать функцию перехода для двух ближайших состояний

$$J(t) = \int_0^t k_\alpha(t-\tau) f(\tau) d\tau.$$

Данное выражение можно аналогично (7) преобразовать к виду

$$\Phi(p) = P_M(z) F(p), \quad (10)$$

где $P_M(z)$ – функция переходов по предшествующим состояниям.

Определим структуру переходной функции $P(t, x, S)$ ($t \geq 0, S \in B$) на произвольном фазовом пространстве (E, B) , т.е. вероятность того, что объект с состоянием x , через время t попадает в множество S , и для нее выполнены условия [13]:

а. При фиксированном t и x функция $P(t, x, S)$ является мерой на σ -алгебре B .

б. При фиксированном t и S $P(t, x, S)$ есть B -измеримая функция точки x .

в. $P(t, x, E) \leq 1$.

г. $P(0, x, E \setminus x) = 0$.

д. $P(s+t, x, S) = \int_E P(s, x, dy) P(t, y, S)$ ($s, t \geq 0$)

Переходная функция определяет стандартный процесс, т.е. стационарный процесс X с мерой на σ -алгебре B (не обязательно конечная), такая что:

а. если $\mu(S) = 0$, то $E \setminus S$ всюду плотно в E ;

b. для всех $t > 0$, $S \in B$ $P(t, x, S) = \int_{\Gamma} W(t, x, y) \mu(dy)$, причем при $t > 0$ функция $W(t, x, y)$ непрерывна по x и ограничена и для любых $x, y \in E$ $W(t, x, y) = W(t, y, x)$.

Если $W(t, x; y)$ – переходная плотность, то формула

$$P(t, x, S) = \begin{cases} \int W(t, x, y) dy & \text{при } t > 0 \\ \chi_S(x) & \text{при } t = 0 \end{cases} \quad (x \in E, S \in B)$$

определяет переходную функцию. Причем переходная функция $P(t, x, E)$ – невозрастающая функция от t и имеет предел $P(+0, x, E)$, который для нормальной переходной функции равен 1 при $x \in E$.

Для марковского процесса $\xi(t, \omega)$, $t \in T$ условная вероятность

$$P(x_{(N)} | x_{(N-1)}, \dots, x_1) \equiv P(x_{(N)} | x_{(N-1)}),$$

т.е. при фиксированном состоянии процесса в настоящий момент времени t_{n-1} будущее для момента времени t_n не зависит от прошлого в моменты t_{n-2}, \dots, t_1 .

Непрерывный марковский процесс с дискретным временем представляет последовательность непрерывных случайных величин, для которого существует производная условной функции распределения (переходная плотность вероятности)

$$\frac{\partial P\{\xi(t_n) \leq x_n | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}\}}{\partial x_n} = W(x_n | x_{n-1}),$$

которая удовлетворяет условиям неотрицательности $W(x_n | x_{n-1}) \geq 0$ и нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} W(x_n | x_{n-1}) dx_n = 1$. При этом цепочка состояний, описывающих эволюцию непрерывного марковского процесса, на множестве состояний в дискретные моменты времени

$$A = \{x_{t_0} \in S_0, \dots, x_{t_m} \in S_m\} \quad (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = c, S_1, \dots, S_m \in B)$$

задается через его двумерный закон распределения

$$\begin{aligned} p(x_{(1)}, \dots, x_{(N)}) &= P(x_{(N)} | x_{(N-1)}, \dots, x_{(1)}) p(x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = P(x_{(N)} | x_{(N-1)}) p(x_{(1)}, \dots, x_{(N-1)}) = \dots \\ &= P(x_{(N)} | x_{(N-1)}) P(x_{(N-1)} | x_{(N-2)}) \dots P(x_{(2)} | x_{(1)}) p(x_{(1)}), \end{aligned}$$

т.е. при начальной плотности $p(x_1)$ и переходной вероятности $P(x_i|x_{i-1})$ можно определить многомерную плотность вероятности вектора $\{x_1 \dots x_n\}$ [13, 14]:

$$p(x_1, \dots, x_n) = p(x_1) \prod_{i=2}^n P(x_i|x_{i-1}).$$

Исследуем свойства переходной вероятности $P(x_i|x_{i-1})$ при фиксированном t и x функции $P(t, x, S)$

$$\prod_{i=2}^n P(x_i|x_{i-1}),$$

где $S_k = \{x_k^{(n)} < x < x_k^{(n)} + \Delta_{n+1}\}$, $\Delta_i = \Delta \times \xi^i$ – состояния, задающие эволюцию непрерывного марковского процесса, на множестве его состояний в дискретные моменты времени. Рассмотрим один из сомножителей данного произведения и учтем, что функции $P(x_i|x_{i-1})$ подобны друг другу, а поскольку $p(x_1) = P(x_1|x_0)p(x_0)$, то

$$P(x_1|x_0) = \frac{p(x_1)}{p(x_0)}. \quad (11)$$

Функция $P(x_i|x_{i-1})$ при различных значениях i соответствует различным уровням рассмотрения исследуемой системы и является масштабно-инвариантной, поскольку функции $P(x_i|x_{i-1})$ подобны друг другу, т. е. если $P(x_1|x_0)$ зависит не от x_1 и x_0 в отдельности, а только от их безразмерной комбинации $\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$:

$$P(x_1|x_0) = P\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \quad (12)$$

Используя 11 и 12, получаем

$$\frac{p(x_1)}{p(x_0)} = P\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \quad (13)$$

Из (13) при $x_0=1$ имеем $\frac{p(x_1)}{p(1)} = P(x_1)$, а при $x_1=1$ получаем $\frac{p(1)}{p(x_0)} = P\left(\frac{1}{x_0}\right)$,

и в результате

$$P(x_1)P(1/x_0) = P\left(\frac{x_1}{x_0}\right). \quad (13')$$

Прологарифмировав (12') и осуществив преобразование $\ln P(x_1) = U(z_1)$, $z_1 = \ln x_1$, $z_0 = \ln x_0$ получим

$$U(z_1) + U(-z_0) = U(z_1 - z_0). \quad (14)$$

Продифференцировав (14) по z_1 и переходя к пределу $z_0 \rightarrow z_1$, получаем

$$U'(z) = U'(0) = \text{const},$$

что возможно, если только функция $U(z)$ линейна:

$$U(z) = a + bz \text{ или } \ln P(x) = a + b \ln x,$$

откуда для постоянных положительных $A = e^a = x_0^\alpha$ и $\alpha = -b$ выражение для переходной вероятности

$$P(x_1|x_0) = p(x_1)/p(x_0) = \frac{x_0^\alpha}{x_1^\alpha}. \quad (15)$$

Полученный результат подтверждает известное положение, что гиперболическое распределение удовлетворяет условию масштабной инвариантности (12).

Из выражения (15) следует, что

$$\alpha = \frac{\ln P(x_i|x_{i-1})}{\ln x_{i-1} - \ln x_i} = \frac{\ln P(x_i|x_{i-1})}{\ln(z\xi^{i-1}) - \ln(z\xi^i)} = \ln P(\xi) / \ln(1/\xi).$$

Усреднив параметр α по совместной плотности распределения двух соседних состояний системы, и учтя, что $P(x_i|x_{i-1}) = p(x_i)/p(x_{i-1})$ получаем

$$\bar{\alpha} = \bar{v} \{ \text{int}(x_i, x_{i-1}) - H(x_i) \} / \ln 2, \quad (16)$$

где $H(x_i)$ – дифференциальная энтропия i -го состояния системы, $\text{int}(x_i, x_{i-1})$ – интеграция между x_i и x_{i-1} состояниями системы [15].

Применив преобразование Лапласа к (15) и учтя из (6), что $z = pl(1-\xi)$, из (10) имеем

$$\Phi(p) \cong A_\alpha (1-\xi)^{-\alpha} (pl)^{-\alpha} F(p),$$

что соответствует представлению $J(t)$ в форме дробного интеграла [12, 16–18] (Приложение 1)

$$J(t) = A {}_a [t(1-\xi)]^{-\alpha} [\Gamma(\alpha)]^{-1}$$

$${}^1 \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{A_\alpha}{(1-\xi)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-u)^{\alpha-1} f(ut) du, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \tau < t.$$

Таким образом, порядок производной $\bar{\alpha}$ определяется связностью множества состояний, которая задается размерностью топологии множества состояний $\bar{\nu}$, а также энтропией $H(x_i)$ состояния x_i системы и значением интеграции $\text{int}(x_i, x_{i-1})$ между состояниями системы x_i и x_{i-1} .

Анализ полученных результатов

Марковская модель, определяющая переходы системы на мультифрактальных множествах ее состояний вдоль траектории разгона ПП, согласно проведенным в работе исследованиям, определяется фрактальной размерностью (9), учитывающей ее временную и пространственную память, и математическим аппаратом обобщенных дробных производных Римана-Лиувилля (Приложение 1), путем замены в уравнении Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) целочисленных производных на обобщенные производные дробного порядка задаваемых параметром α по выражению (16).

Примеры решения задачи формирования уравнения ФПК, описывающих эредитарные системы, приведены в приложении 2. Эти решения сводятся к определению порядка α дифференциального оператора, который характеризует топологию множества состояний системы, обусловленной параметрами среды. При этом размерность множества состояний, определяемая долей сохранившихся состояний множества состояний, сходится к показателю диферинтегралов ν ($0 < \nu < 1$) и охватывает случаи полностью замкнутой ($\nu=1$) и марковской ($\nu=0$) систем, когда все состояния вырождаются в одно (два) с бесконечно большой плотностью.

Переход к производной дробного порядка по времени позволяет учитывать эффекты памяти системы [16], процессы в которой

классифицируются как процессы с «остаточной» памятью [12, 16], часть которых сохраняется, а другая часть соответствует необратимым потерям. Так расщепление дифференциального оператора $\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на произведение дифференциалов половинного порядка $(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} - \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial^{1/2}}{\partial t^{1/2}} + \sqrt{a} \frac{\partial}{\partial x})$ интерпретируется как два эквивалентных решения [16]. Одно из них соответствует влиянию в прямом направлении ($x > 0$), а второе решение соответствует обратному влиянию ($x < 0$). Для полубесконечного пространства плотность состояний для прямого процесса становится преобладающей и поэтому половина состояний теряется.

Анализ выражения (9) показывает, параметр ξ , определяющий топологию множества состояний, задает интервал регистрации контролируемого параметра через неопределенность (погрешность) его измерения и равен интервалу оценивания вероятности перехода в уравнении ФПК, т. е. интервалу управления, что согласуется с принципами цели и двойственности для системы измерения и управления [19].

Выводы

1. Эредитарная модель системы высокоскоростного разгона на базе магнитоплазменного ЭДУ при фрактальной модели ПП определяется топологией множества ее состояний, часть которых необратимо теряется в процессе ее эволюции и становятся недоступными для системы, и законом пространственно-временной эволюции состояний, который на основе знаний о состоянии в начальный момент времени t_0 в точке пространства x_0 определяет состояние системы в момент времени $t > t_0$.

2. Особенности топологии множества состояний системы высокоскоростного разгона на базе магнитоплазменных ЭДУ определяют введение в уравнение ФПК, определяющее функцию плотности

распределения вероятности перехода, дробной меры для учета априорной неопределенности в моделях данных систем.

3. Уравнение с производной половинного порядка определяется как решение, соответствующее влиянию в системе в прямом направлении ($x > 0$), а система, которая описывается данным уравнением, содержит каналы, входящие в состав ветвящейся структуры, порождаемой внешней средой.

4. Порядок дробной производной $\bar{\alpha}$ в уравнении ФПК определяется связностью множества состояний, которая задается его размерностью $\bar{\nu}$, характеризующейся топологией множества состояний (долей сохранившихся каналов), а также энтропией $H(x_i)$ состояния x_i системы и интеграцией $\text{int}(x_i, x_{i-1})$ между x_i и x_{i-1} состояниями системы.

5. Необходимость учета связности множества состояний при определении порядка производной α модели эредитарной системы, определяет выбор итерационного подхода при имитационном моделировании системы.

Приложение 1

Общий анализ дробных операторов

О. Гельдер [17] показал, что если функция $f(x)$ не дифференцируема, то может существовать предел $f^{(\alpha)}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f / \Delta x^\alpha$, который является производной с дробной размерностью α (показатель Гельдера α). При этом функция $f(x)$ должна удовлетворять условию Гельдера с показателем α на отрезке $[a, b]$, для которой существуют действительное число $A > 0$ такое, что

$$|F(x_1) f(x_2)| \leq A |x_1 x_2|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x_1 x_2 \in [a, b].$$

Обобщение формулы Коши на нецелые порядки интегро-дифференциальных операторов определяет диферинтегралы дробного порядка [11, 16–18]:

$$I_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \text{ и } D_{a,t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-n+1}} d\tau,$$

где $\beta, a \in \mathbf{R}, n-1 < \beta < n, I_{a,t}^{\beta}$ – интегральный оператор порядка $\beta, D_{a,t}^{\beta}$ – дифференциальный оператор порядка β .

Дробный дифференциал удовлетворяет правилу композиции [18]

$$D_{0,x}^{\alpha} D_{0,x}^{\beta} y(x) = D_{0,x}^{\alpha+\beta} y(x), \quad (\text{П1.1})$$

где $D_{0,x}^{\alpha}, D_{0,x}^{\beta}$ и $D_{0,x}^{\alpha+\beta}$ – операторы дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α, β и $\alpha+\beta$, действующие на интервале от 0 до x . С помощью (П1.1) целочисленная производная представляется в виде двух дробных производных

$$\frac{dy(x)}{dx} = D_{0,x}^{\alpha} D_{0,x}^{1-\alpha} y(x).$$

Приложение 2

Учет дробного порядка в обобщенном уравнении Фокера–Планка –Колмогорова

Обобщенное уравнение ФПК дробного порядка получается на основе уравнения ЧКС для условной плотности вероятности $W(y_1 t_1 | y_2 t_2)$ имеет вид [20]

$$W(y_1 | y_2; t+\Delta t) = \int dy_3 W(y_1 | y_3; t) W(y_3 | y_2; \Delta t). \quad (\text{П2.1})$$

Для вывода обобщенного уравнения ФПК исходим из выражения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^{\alpha} W(y | y_1, t)}{\partial t^{\alpha}} dy, \quad (\text{П2.2})$$

где $0 < \alpha \leq 1$, производная дробного порядка определена соотношением [18]

$$\frac{\partial^{\alpha} W(y | y_1, t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{W(y | y_1, \tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau, \quad (\text{П2.3})$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Учтя соотношения (П2.2), (П2.3) уравнение ЧКС (П2.1) приводится к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y|y_1, t)}{\partial t^\alpha} dy = \int dy dy_2 dt_2 Q(y) W(y_2|y_1, t_2) W^{(\alpha)}(y_2|y; t-t_2), \quad (\text{П2.4})$$

где введена функция $W^{(\alpha)}(y_2|y, t-t_2) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{W(y|y_1; z-t_2)}{(t-z)^\alpha} dz$.

Вспользуемся разложением функции $Q(y)$ в обобщенный ряд Тейлора [21]

$$Q(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y-y_2)^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{\partial^{\beta+n}}{\partial y^{\beta+n}} Q(y) \Big|_{y=y_2},$$

где $0 < \beta \leq 1$. В результате уравнение (П2.2) можно привести к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(y) \frac{\partial^\alpha W(y|y_1; t)}{\partial t^\alpha} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \int dy_2 dt_2 \frac{Q^{(n+\beta)}(y_2)}{\Gamma(n+\beta+1)} A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) W(y_2|y_1; t_2),$$

где $A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) = \int dy (y-y_2)^{n+\beta} W^{(\alpha)}(y_2|y; t-t_2)$ (П2.5) – обобщенные моменты.

При $\alpha=1$ и $\beta=1$ (П2.5) переходит в обычное выражение для момента.

Проинтегрировав (П2.5) по частям, получим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$\frac{\partial^2 W(y|y_1, t)}{\partial t^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+\beta+1)} \frac{\partial^{n+\beta}}{\partial y^{n+\beta}} \int dt_2 [A_{n+\beta}^\alpha(y; t-t_2) W(y|y_1; t_2)]. \quad (\text{П2.6})$$

Уравнение (П2.6) представляет собой обобщенное уравнение ФПК дробного порядка и определяет класс стохастических процессов с обобщенными моментами

$$A_{n+\beta}^\alpha(y_2; t-t_2) = A_{n+\beta}^\alpha \delta(t-t_2).$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial^\alpha W(y|y_1; t)}{\partial t^\alpha} = -\frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} (A_\beta^\alpha W(y|y_1; t)) + \frac{1}{\Gamma(2+\beta)} \frac{\partial^{1+\beta}}{\partial y^{1+\beta}} (A_{1+\beta}^\alpha W(y|y_1; t)), \quad (\text{П2.7})$$

которое при $\alpha=1$ и $\beta=1$ переходит в уравнение ФПК [19].

I. Решение задачи Коши, состоящей из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0,$$

при $0 < \alpha \leq 1$, $t > 0$, $|x| < \infty$ и с начальным условием к уравнению (П2.1) в виде

$$\frac{\partial^{\alpha-1}}{\partial t^{\alpha-1}} f(x, 0) = A(x),$$

после прямого и обратного преобразования Фурье по переменной x известно [18]

$$f(x, t) = \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(ik(x-x')) A(x') E_{\alpha,\alpha}(-Dk^2 t^\alpha), \quad (\text{П2.8})$$

где $E_{\alpha,\beta}(-z^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$ – функция Миттаг-Леффлера [17].

Для $A(x) = \delta(x)$ для $\alpha=1$ и $E_{1,1}(-z) = \exp(-z)$ решение (П2.8) имеет известный вид

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (\text{П2.9})$$

В случае, например $\alpha=1/2, 1/4$ функция $E_{\alpha,\alpha}(-z^\alpha)$ принимает вид

$$E_{1/2,1/2}(-\sqrt{z}) = \pi^{-1/2} - \sqrt{z} \exp(z) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})],$$

$$E_{1/4,1/4}(-z^{1/4}) = \frac{1}{\Gamma(1/4)} {}_1F_1(1; 1/4; z) + \frac{\sqrt{z}}{\Gamma(3/4)} {}_1F_1(1; 3/4; z) - z^{3/4} \exp(z) [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{z})] - \frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}.$$

II. Для решения уравнения (6) при начальном условии $f(x, t=0) = f(x, 0)$ преобразуем его к виду [22]

$$\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{f(x, 0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{П2.10})$$

Второе слагаемое в (П2.10) результат действия дробной производной на начальное условие. После преобразования Фурье по x и Лапласа по t имеем

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(-ikx) f(k, 0) E_{\alpha,1}(-Dk^2 t^\alpha)$$

Для $f(x, t=0) = \delta(x)$ имеем

$$f(x, t) = \int_0^{\infty} dk \cos(kx) E_{\alpha,1}(-Dk^2 t^\alpha). \quad (\text{П2.11})$$

При $\alpha=1$ решения (П2.7) и (П2.9) совпадают, а для $\alpha=1/2, 1/4$ функции Миттаг-Леффлера имеют вид:

$$E_{1/2,1}(-z^{1/2}) = \exp(z) [1 - \operatorname{erf}(\sqrt{z})], \quad E_{1/4,1}(-z^{1/4}) = \exp(z) \left[1 + \operatorname{erf}(\sqrt{z}) - \frac{\gamma(1/4, z)}{\Gamma(1/4)} - \frac{\gamma(3/4, z)}{\Gamma(3/4)} \right],$$

где $\gamma(a; z)$ – неполная Гамма-функция.

III. Решение задачи

$$\partial^\alpha f(x, t) / \partial t^\alpha - D \partial^\alpha f(x, t) / \partial x^\alpha = 0$$

для ограниченной области $0 < x \leq l$, с краевыми условиями $f(x, 0) = \varphi(x)$,

$$-\partial f(x, t) / \partial x + h_0 f(x, t) = 0 \text{ при } x = 0 \quad \text{и} \quad \partial f(x, t) / \partial x + h_0 f(x, t) = 0 \text{ при } x = l,$$

полученная методом разделения переменных [23] имеет вид

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) \right) E_{\alpha, 1}(-\lambda_n D t^\alpha), \quad (\text{П2.12})$$

где $C_n = \frac{2\lambda_n^2}{l(\lambda_n^2 + h_0^2) + h_0 + h_1 \frac{\lambda_n^2 + h_0^2}{\lambda_n^2 + h_1^2}} \int_0^l \varphi(x) \left[\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) \right] dx$, а λ_n корни

уравнения $\text{tg}(\lambda l) = \frac{\lambda(h_0 + h_n)}{\lambda^2 - h_0 h_1}$.

Решение (П2.12) при $\alpha=1$ совпадает с известным решением, а для $\alpha=1/2$, имеет вид

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\cos(\lambda_n x) + \frac{h_0}{\lambda_n} \sin(\lambda_n x) \right) \exp(-\lambda_n^4 A^2 t^2 [1 - \text{erf}(\lambda_n^2 A t)]).$$

Решение уравнения (П2.11) при $t \rightarrow \infty$ имеет степенной характер [24]

$$\exp(z)[1 - \text{erf}(\sqrt{z})] = \exp(z) \text{erfc}(\sqrt{z}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot z}} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2m-1)}{(2z)^m} \right]$$

и отличается от экспоненциального асимптотического решения (П2.9).

Литература

1. Azanov I. B., Aleksandrov V. A., Obydennikov S. S., Tjutin V. K., Khrustalev M. M., Judas V. I. Macroparticle launch velocity control in rail acceleration // IEEE Transactions on Magnetics. 1997. V. 33, № 1. pp. 213 – 219.

2. Анищенко В. С. Динамические системы // Соросовский образовательный журнал. 1997. №11. С. 77 – 84.

3. Кириевский Е. В. Методы и средства измерительного преобразования скорости движения плазмы для информационно-измерительных и управляющих систем электродинамических ускорителей: Автореф. дис. докт. техн. наук: 05.11.16.–Новочеркасск, 2009.–34 с.

4. Михайлов А. А. Робастные устройства контроля скорости в системах управления специализированными электрофизическими установками: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.05.–Новочеркасск, 1994.–18 с.

5. Никитин А.П., Чернавская О.Д., Чернавский Д.С. Распределение Парето в динамических системах, находящихся в шумовом поле//Труды института общей физики РАН им. А.М. Прохорова. 2009, Том 65. С. 107–123.
6. Кобелев Я. Л. Феноменологические модели описания больших систем с фрактальными структурами: Автореф. дис. канд. техн. наук: 01.04.07.–Екатеринбург, 2001.–24 с.
7. Вольтерра В. Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1982. 304 с.
8. Соседко В. В., Янишевская А. Г. Математическая модель единой системы конструкторско-технологической подготовки и производства на промышленном предприятии//Инженерный вестник Дона, 2012, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/49N4t2y12/1404.
9. Михайлов А. А., Базуева С. А. Использование скрытой марковской модели при синтезе стохастического алгоритма решения задачи//Инженерный вестник Дона, 2015, №2, ч.2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3073
10. Mikhaylov A. A., Bazuyeva S. A. Probabilistic Approach to the Synthesis of Algorithm for Solving Problems//Modern Applied Science/Canadian Center of Science and Education. 2015. V. 9, №5. pp. 125–132
11. Волков И. К., Зуев С. М., Цветкова Г. М. Случайные процессы. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 1999. 448 с.
12. Нигматулин Р. И. Дробный интеграл и его физическая интерпретация //ТМФ. 1992. Т.90, №3. С. 354–368
13. Дынкин Е. Б. Марковские процессы. М.: Физматгиз. 1963. 860 с
14. Городецкий А. Я. Информационные системы. Вероятностные модели и статистические решения. СПб: Изд-во СПбГПУ. 2003. 326 с.

15. Михайлов А. А., Михайлова С. А. Оценка структурной интеграции информационно–измерительных систем//Известия высших учебных заведений. Северо–Кавказский регион. Технические науки. 2007. №6. С. 22–26.

16. Бабенко Ю. И. Тепломассообмен. Метод расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия. 1986. 144 с.

17. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН. 2000. 299 с.

18. Самко С. Г., Килбас Ф. Ф., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

19. Перегудов Ф. И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. М.: Высшая школа. 1989. 367 с.

20. Гарднер К. В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир. 1986. 528 с.

21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физико-математическая литература. 1963. 1108 с.

22. Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка//Дифференциальные уравнения. 1990. Т.26, № 4. С. 660–670.

23. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной по времени//Доклады Адыгской АН. 1994. Т.1, № 1. С. 17–18.

24. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 301 с.

References

1. Azanov I. B., Aleksandrov V. A., Obydennikov S. S., Tjutin V. K., Khrustalev M. M., Judas V. I. Macroparticle launch velocity control in rail acceleration // IEEE Transactions on Magnetism. 1997. V. 33, № 1 pp. 213 – 219.



2. Anishhenko V. S. Sorosovskij obrazovatel'nyj zhurnal. 1997. №11. pp. 77 – 84.
 3. Kirievskij E. V. Metody i sredstva izmeritel'nogo preobrazovanija skorosti dvizhenija plazmy dlja informacionno-izmeritel'nyh i upravljajushhijh sistem jelektrodinamicheskijh uskoritelej. [Methods and tools for measurement conversion speed plasma for information-measuring and control systems electrodynamic accelerators]. Novochoerkassk, 2009. 34 p.
 4. Mihajlov A. A. Robastnye ustrojstva kontrolja skorosti v sistemah upravlenija specializirovannymi jelektrofizicheskimi ustanovkami. [Robust device for speed monitoring in control systems specialised electrophysical installations]. Novochoerkassk, 1994. 18 p.
 5. Nikitin A.P., Chernavskaja O.D., Chernavskij D.S. Trudy instituta obshhej fiziki RAN im. A.M. Prohorova. 2009. Tom 65. pp. 107–123.
 6. Kobelev Ja. L. Fenomenologicheskie modeli opisanija bol'shijh sistem s fraktal'nymi strukturami. [Phenomenological models describe large systems with fractal structures]. Ekaterinburg, 2001. 24 p.
 7. Vol'terra V. Teorija funkcionalov i integral'nyh i integro-differencial'nyh uravnenij. [Theory of functionals and of integral and integro-differential equations]. M.: Nauka. 1982. 304 p.
 8. Sosedko V.V., Janishevskaja A.G. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 URL: ivdon.ru/magazine/archive/49N4t2y12/1404.
 9. Mihajlov A. A., Bazueva S. A. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2, ch.2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3073.
 10. Mikhaylov A. A., Bazuyeva S. A. Probabilistic Approach to the Synthesis of Algorithm for Solving Problems//Modern Applied Science/Canadian Center of Science and Education. 2015. V. 9, №5. pp. 125–132.
 11. Volkov I. K., Zuev S. M., Cvetkova G. M. Sluchajnye processy. [Random processes]. M.: Izd-vo MGTU im. N. Je. Baumana. 1999. 448 p.
-

12. Nigmatulin R. I. TMF. 1992. T.90, №3. pp. 354–368
 13. Dynkin E. B. Markovskie processy. [Markov processes]. M.: Fizmatgiz. 1963. 860 p.
 14. Gorodeckij A. Ja. Informacionnye sistemy. Veroyatnostnye modeli i statisticheskie reshenija. [Information system. Probabilistic models and statistical decision]. SPb: Izd-vo SPbGPU, 2003. 326 p.
 15. Mihajlov A. A., Mihajlova S. A. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Severo–Kavkazskij region. Tehnicheskie nauki. 2007. №6. pp. 22–26.
 16. Babenko Ju. I. Teplomassoobmen. Metod rascheta teplovyh i difuzionnyh potokov. [Heat and mass transfer. Method of calculation of heat and diffusion fluxes]. L.: Himija. 1986. 144 p.
 17. Nahushev A.M. Jelementy drobnogo ischislenija i ih primenenie. [Elements of fractional calculus and their applications]. Nal'chik: Izd-vo KBNC RAN. 2000. 299 p.
 18. Samko C. G., Kilbas F. F., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i nekotorye prilozhenija. [Integrals and derivatives of fractional order and some applications]. Minsk: Nauka i tehnika. 1987. 688 p.
 19. Peregudov F.I., Tarasenko F.P. Vvedenie v sistemnyj analiz. [Introduction to system analysis]. M.: Vysshaja shkola, 1989. 367 p.
 20. Gardner K. V. Stohasticheskie metody v estestvennyh naukah. [Stochastic methods in natural Sciences]. M.: Mir. 1986. 528 p.
 21. Gradshtejn I. S., Ryzhik I. M. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij. [Tables of integrals, sums, series, and products]. M.: Fiziko-matematicheskoy literatury. 1963. 1108 p.
 22. Kochubej A. N. Differencial'nye uravnenija. 1990. T.26, № 4. pp. 660–670.
 23. Gekkieva S. H. Doklady Adygskoj AN. 1994. T.1, № 1. pp. 17–18.
 24. Nahushev A. M. Uravnenija matematicheskoy biologii. [Equations of mathematical biology]. M.: Vysshaja shkola. 1995. 301 p.
-