

---

## Использование конструкции вложенного метаграфа для моделирования сложных систем

*С.В. Астанин, Н.К. Жуковская*

*Российский новый университет, Таганрогский филиал, Таганрог*

**Аннотация:** Мета- и гиперграфовые представления позволяют сократить объем обрабатываемых данных без потерь исходной информации. Это преимущество определяет наиболее перспективную сферу для их применения: задачи анализа больших данных, при условии, что эти данные могут быть описаны с использованием графового представления. В статье предложен подход к моделированию иерархических систем, на основе вложенных метаграфов. Для устранения неоднозначности в трактовке понятий используется теория категорий. Даны формализованные описания статического и динамического вложенных метаграфов, методы их задания, а также основные операции. Основу понятий вложенных метаграфов составляет моноид, как информационный объект, который характеризуется внутренней формой, внутренним и внешним содержаниями. Таким образом, моноид является обобщением графовой структуры и интерпретируется как вершина обобщенного графа.

**Ключевые слова:** вложенный метаграф, моноид метаграфа, матрица смежности метаграфа, операции над вложенными метаграфами.

### Введение

Первые десятилетия, после появления основополагающей работы А. Basu [1], характеризовались повышенным интересом к новой конструкции и ее использованием в таких приложениях, как планирование и управление проектами, управление рабочим процессом, моделирование предприятия и др. [2-4]. Однако, в последние годы, поток исследований в этой области значительно сократился, а научные публикации связаны, в основном, с визуализацией различных процессов посредством метаграфов.

На наш взгляд, потеря интереса к метаграфам определяется отсутствием строгих теоретических положений, подобным тем, которые были сформулированы в классической теории графов. Более того, введенное А. Basu понятие метавершины содержательно не определено и противоречит этой теории. Так, у разных исследователей метавершина может рассматриваться и как вершина графа, содержащая множество других

вершин [5], и как гиперребро, которое, по непонятным причинам, может стать вершиной [6].

Тем не менее, существующие проблемы, от семантического представления и обработки больших данных, до моделирования систем управления предприятиями, требуют новых решений, связанных с обобщением данных и знаний. Одним из подходов к такому обобщению стало представление знаний на основе вложенного метаграфа [7]. При определении такого понятия использовались концепции обычных графов, метаграфов и гиперграфов. При этом, метавершина интерпретировалась как гиперребро, что приводило к неоднозначности определений терминов «вершина» и «ребро». Кроме того, определение  $n$ -мерного вложенного метаграфа оказалось достаточно громоздкой конструкцией, осложняющей описание. Для устранения этих недостатков, в настоящей работе дается определение вложенного метаграфа как категории. В математике категория определяет алгебраические свойства совокупностей морфизмов однотипных математических объектов (множеств, топологических пространств, групп и т.д.) [8]. В прикладных приложениях важен содержательный смысл, используемых, при определении метаграфа, понятий, включая и понятие «категория», как математического объекта [9].

## 1. Основные определения

Пусть дано множество объектов  $F=\{F_1, \dots, F_n\}$ , каждый из которых является графом, и множество морфизмов  $f=\{f_1, \dots, f_m\}$ .

*Определение 1.* Статическим вложенным метаграфом (СВМ) 1-го уровня называется моноид  $C_1$ , состоящий из единственного объекта  $F_I=(V_I, E_I)$ , ассоциативного закона композиции (\*) и единичного морфизма  $\alpha$ , где  $V_I=\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}\}$  - множество вершин графа;  
 $E_I=\{(v_i, v_j)\}$  - семейство пар элементов из  $V$ , образующие дуги (ребра);  
 $\alpha : C_1 \rightarrow C_1$ .

Так как моноид представлен единственным объектом в виде графа  $F_I=(V_I, E_I)$ , то в качестве ассоциативного закона композиции могут быть использованы операции объединения и пересечения графов. Для нашего случая  $F_I=(V_I, E_I) \cap F_I=(V_I, E_I)$ ,  $F_I=(V_I, E_I) \cup F_I=(V_I, E_I) = F_I=(V_I, E_I)$ .

Вершина графа  $F_I$  называется элементарной, если она не является моноидом. Очевидно, что для статически вложенного метаграфа 1-го уровня все вершины графа  $F_I$  являются элементарными, а граф  $F_I$  является обычным ориентированным или неориентированным графом.

Категорию  $C_1$  будем интерпретировать как информационный объект, который характеризуется внутренней формой, внутренним и внешним содержаниями. Признаки, черты или свойства объекта, характеризующие его единичное (частное) проявление назовем внутренним содержанием объекта. Внутреннее содержание структурно организовано, т.е. имеется способ взаимосвязи признаков, который выступает внутренней формой объекта и определяет общее проявление объекта. Кроме внутреннего содержания и внутренней формы, объект может обладать внешним содержанием, т.е. совокупностью свойств (структурно организованных или нет), характеризующих внутреннюю форму объекта.

В нашем случае внутреннее содержание определяется совокупностью означенных вершин и ребер (дуг). Внутреннюю форму образует ориентированный (неориентированный) граф  $F$ . Внешнее содержание семантически характеризует категорию  $C_1$ . Вышесказанное позволяет рассматривать моноид  $C_1$  в качестве атрибутивной вершины.

Иллюстрацией такого метаграфа может служить представление состояний сложных систем. Для описания состояний таких систем, как правило, требуется значительное число переменных и их измерений. Для сокращения пространства описаний часто применяют подход, основанный на использовании лингвистических переменных теории нечетких множеств. В

---

частности, такой подход применим при представлении состояний бизнес-процесса.

*Определение 2.* Статическим вложенным метаграфом 2-го уровня называется моноид  $C_2$ , состоящий из единственного объекта  $F_1=(V_1, E_1)$  и единичного морфизма  $\alpha$ , где

$V_1=\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}\}$  - множество вершин графа;

$E_1=\{(v_i, v_j)\}$  - семейство пар элементов из  $V$ , образующие ребра;

$\alpha : C_2 \rightarrow C_2$ , причем  $v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}$  также являются также являются моноидами  $v_{1,i}=(V_{2,i}, E_{2,i})$ ,  $i = \overline{1, k}$  с единичными морфизмами  $f = \{f_1, \dots, f_k\}$ .

Для статистического вложенного метаграфа 2-го уровня все вершины категорий  $v_{1,i}$  являются элементарными.

Моноиды  $v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}$  относятся к первому уровню представления, а моноид  $C_2$  к второму уровню.

Таким образом моноид  $C_2$  есть обобщение графа  $F_1$  на множестве моноидов  $V_1$ , а моноиды  $V_1$  являются обобщениями графов  $v_{1,i}=(V_{2,i}, E_{2,i})$ ,  $i = \overline{1, k}$ , причем вершины  $V_{2,i}$  представляют собой элементарные вершины.

*Определение 3.* Статическим вложенным метаграфом  $n$ -го уровня называется моноид  $C_n$ , состоящий из единственного объекта  $F_1=(V_1, E_1)$  и единичного морфизма  $\alpha$ , где

$V_1=\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}\}$  - множество вершин графа;

$E_1=\{(v_i, v_j)\}$  - семейство пар элементов из  $V$ , образующие ребра;

$\alpha : C_n \rightarrow C_n$ ;

$v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,k}$  являются моноидами ориентированных графов  $v_{1,i}=(V_{2,i}, E_{2,i})$ ,  $i = \overline{1, k}$  с единичными морфизмами  $f = \{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $V_{2,i}, \dots, V_{n-1,r}$ ,  $r=1,2,\dots, p$ , в свою очередь, являются моноидами ориентированных графов с соответствующими единичными морфизмами, причем  $V_{n-1,r}$  представляют собой моноиды ориентированных графов  $F_{n,l}=(V_{n,l}, E_{n,l})$ ,  $l=1,2, \dots, u$ , с элементарными вершинами  $V_n$ .

Таким образом, на каждом уровне, кроме  $n$ -го уровня, имеется набор моноидов, обобщающих соответствующие ориентированные графы.

СВМ  $n$ -го уровня можно рассматривать как стратифицированный объект с  $n$  стратами, причем первый (самый верхний) страт представлен моноидом  $C_n$ .

Второй страт,  $(n-1)$ -уровня, представлен набором моноидов, число которых совпадает с числом вершин графа  $V_l$  и т.д., вплоть до  $n$ -го страта (первого уровня), вершины графов которого являются элементарными.

*Определение 4.* Динамическим вложенным метаграфом (ДВМ)  $n$ -го уровня называется стратифицированная ситуационная сеть, начальными вершинами которой являются моноиды  $n$ -го уровня СВМ, а ребрами управляющие воздействия (морфизмы), преобразующие моноиды в момент времени  $t-1$  в моноиды в момент времени  $t$ .

Иными словами, ДВМ  $n$ -го уровня представлен набором категорий моноидов  $S_1, \dots, S_n$ , начальными вершинами которых являются моноиды  $C_1, \{C_2\}, \dots, \{C_n\}$ , а морфизмами – управляющие воздействия, преобразующие их форму (структуру) и содержание. Предполагается, что только первый уровень, в качестве начальной вершины, представлен единственным моноидом  $C_1$  с одним объектом  $F_1=(V_1, E_1)$ . Нижние уровни имеют множества начальных моноидов  $\{C_2\}, \dots, \{C_n\}$ , для каждого из которых может быть построена категория  $S_{i,j}$ , где  $i$  – число уровней, а  $j$  – количество моноидов  $i$ -го уровня. Так, формально, ДВМ 1-го уровня можно определить следующим образом:  $S_1=(X_1, *)$ , где  $X_1$  – множество моноидов, причем  $C_1 \in X_1$ , а «\*» - морфизм моноидов.

Примером ДВМ 1-го уровня может явиться представление динамики бизнес-процесса на основе его описания посредством лингвистических переменных [10].

## 2. Матричный способ задания вложенных метаграфов и операции над вложенными метаграфами

Использование моноидов СВМ и ДВМ в качестве вершин графа значительно упрощает их представление, и сводится к различным способам задания обычных ориентированных графов. Фактически выше рассмотрены графический и аналитический способы задания вложенных метаграфов. Остановимся более подробно на матричном способе, на примере построения матрицы смежности СВМ 2-го уровня.

Пусть  $C_n, C_{n-1,k}, \dots, C_{2,l}, C_{1,p}$  - моноиды СВМ  $n$ -го уровня, соответствующие уровням  $n, n-1, \dots, 1$ , а  $x_i (i = \overline{1, r})$  – элементарные вершины (порождающее множество) графов моноидов  $C_{1,p}$ .

*Определение 5.* Матрицей смежности СВМ  $n$ -го уровня называется набор квадратных матриц, построенных по иерархическому принципу:  $x_i \times x_i, C_{1,p} \times C_{1,p}, \dots, C_{n-1,k} \times C_{n-1,k}$ . На пересечении строк и столбцов каждой матрицы ставятся значения 1 или 0, в зависимости от того, существует ли ребро между парой вершин соответствующих графов.

Аналогичным образом можно построить матрицу инциденций.

Операции объединения и пересечения рассмотрим для случая СВМ.

*Определение 6.* Объединение СВМ  $C_{n,1}$  и  $C_{n,2}$ , обозначаемое как  $C_{n,1} \cup C_{n,2}$ , представляет такой СВМ  $C_{n,}$ , что, если для конкретного  $i$ -го уровня, существуют совпадающие моноиды, а также совпадают некоторые вершины графов этих моноидов, то графы объединяются по правилам теории графов.

*Определение 7.* Пересечением СВМ  $C_{n,1}$  и  $C_{n,2}$ , называется СВМ  $C_n = C_{n,1} \cap C_{n,2}$  множество графов моноидов которого  $F_{1n,1} = (V_{1n,1}, E_{1n,1}) \cap F_{1n,2} = (V_{1n,2}, E_{1n,2}), \dots, F_{n,1} = (V_{n,1}, E_{n,1}) \cap F_{n,2} = (V_{n,2}, E_{n,2})$ .

К унарным операциям на СВМ относятся операции удаления вершины и удаления ребра (дуги).

*Определение 8.* СВМ  $C_n^*$  называется подметаграфом СВМ  $C_n$  (обозначается  $C_n^* \subseteq C_n$ ), если  $V_{n,1}^* \subseteq V_{n,1}, E_{n,1}^* \subseteq E_{n,1} \dots V_{n,l}^* \subseteq V_{n,l}, E_{n,l}^* \subseteq E_{n,l}$ .

*Определение 9.* Если  $C_{n-1,k}, \dots, C_{2,l}, C_{1,p}$ , - моноиды СВМ  $C_n$ , соответствующие уровням,  $n-1, \dots, 1$ , а  $x_i$  ( $i = \overline{1, r}$ ) – элементарные вершины (порождающее множество) графов моноидов  $C_{1,p}$ , то  $C_{n-x_i}$  или  $C_n - C_{n-1,k}$  - порожденный подметаграф СВМ  $C_n$ , т.е.  $C_{n-x_i}$  или  $C_n - C_{n-1,k}$  является СВМ  $C_n^*$ , получившимся после удаления из  $C_n$  вершины  $x_i$  или  $C_{n-1,k}$  и всех ребер (дуг), инцидентных этой вершине.

Заметим, что удаление моноида  $C_{n-1,k}$  означает удаление графа, соответствующего ему. Это означает и удаление всех вершин данного графа на всех нижеследующих уровнях.

*Определение 10.* Пусть  $\{E_{n,l}\}$  – множество ребер (дуг)  $C_n$ . Если  $E_{n,h} \in \{E_{n,l}\}$ , то  $C_n - E_{n,h}$  – подметаграф СВМ  $C_n$ , получающийся после удаления из  $C_n$  дуги  $E_{n,h}$ .

В отличие от удаления вершины, удаление ребра (дуги) касается только текущего уровня  $C_n$ .

### Заключение

Категорный подход к представлению метаграфа позволяет преодолеть неоднозначность определений терминов «вершина» и «ребро», а также упростить его описание, используя способы задания и операции над СВМ классической теории графов.

СВМ является иерархической структурой, позволяющей описание сложных объектов с разным уровнем детальности. ДВМ представляет собой ситуационную сеть, моделирующую возможные процессы изменений



исходных ситуаций, заданных моноидами СВМ, под воздействием гомоморфных морфизмов.

Сегодня, представление знаний является одной из важнейших задач в области искусственного интеллекта и разработки программного обеспечения. Это, в частности, связано с тем, что современное программное обеспечение становятся все более сложными, комбинируя элементы ИИ, Интернет-технологии и другие новейшие технологии. Использование модели плоского графа и гиперграфа не допускает реализацию принципа эмерджентности при моделировании сложных систем. Видится, что реализовать этот принцип возможно на основе модели вложенного метаграфа.

### Литература

1. Basu, A. and W. Blanning, 1994. A Tool for Modeling Decision Support Systems. *Management Science*, 12(40). Pp.1579-1600.
2. Гапанюк Ю. Е., Ханмурзин Т. И., Костян А. А., Фадеев А. А., Брысина Н. Р. Использование метаграфового подхода в концептуальном моделировании // *Динамика сложных систем*. 2020. Т.14. №2. С.54-62.
3. Шмырин А.М., Мишачёв Н.М., Канюгина А.С. Квазистатические окрестностные системы // *Современные наукоемкие технологии*. 2018. № 4. С.137-142 URL: [top-technologies.ru/ru/article/view?id=36972](http://top-technologies.ru/ru/article/view?id=36972).
4. Штогрина Е. С., Кривенко А. С. Метод визуализации метаграфа // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2014. № 3 (91). С.124– 130.
5. Самохвалов Э. Н., Ревунков Г. И., Гапанюк Ю. Е. Использование метаграфов для описания семантики и прагматики информационных систем // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение»*. 2015. №1 (100). URL: [cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-metagrafov-dlya-opisaniya-semantiki-i-pragmatiki-informatsionnyh-sistem](http://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-metagrafov-dlya-opisaniya-semantiki-i-pragmatiki-informatsionnyh-sistem).



6. Блюмин С.Л., Приньков А.С., Развитие матричного представления обобщенных графовых структур в задачах описания и анализа больших данных // *Comp. Nanotechnol.* 2018. №2. С.9–15.

7. Астанин С. В., Драгныш Н. В., Жуковская Н. К. Вложенные метаграфы как модели сложных объектов // *Инженерный вестник Дона.* 2012. №4-2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1434](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1434)

8. Курош А. Г., Лившиц А. Х., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий // *УМН.* 1960. Т.15. Вып. 6(96). С.3–52.

9. Basu A., Blanning R. *Metagraphs and Their Applications.* Springer Science+Business Media LLC. 2007. P.174.

10. Астанин С. В., Жуковская Н. К. Управление бизнес-процессами на основе их моделирования нечеткими ситуационными сетями // *УБС.* 2012. №37. С.145–163.

### References

1. Basu, A., W. Blanning. *Management Science*, 1994.12(40). Pp.1579-1600.

2. Gapanyuk YU. E., Khanmurzin T. I., Kostyan A. A., Fadeyev A. A., Brysina N. R. *Dinamika slozhnykh sistem.* 2020. Т. 14. № 2. Pp. 54-62.

3. Shmyrin A.M., Mishachëv N.M., Kanyugina A.S. *Sovremennyye naukoymkiye tekhnologii.* 2018. №4. pp.137-142. URL: [top-technologies.ru/ru/article/view?id=36972](http://top-technologies.ru/ru/article/view?id=36972)

4. Shtogrina E. S., Krivenko A. S. *Nauchno-tekhnicheskiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki.* 2014. №3 (91). Pp.124– 130.

5. Samokhvalov E. N., Revunkov G. I., Gapanyuk YU. E. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Seriya «Priborostroyeniye».* 2015. №1 (100). URL: [cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-metagrafov-dlya-opisaniya-semantiki-i-pragmatiki-informatsionnyh-sistem](http://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-metagrafov-dlya-opisaniya-semantiki-i-pragmatiki-informatsionnyh-sistem).

6. Blyumin S.L., Prin'kov A.S. *Comp. Nanotechnol.* 2018. №2. Pp.9–15.



7. Astanin S. V., Dragnysh N. V., Zhukovskaya N. K. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. №4-2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1434](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1434)
8. Kurosh A. G., Livshits A. KH., Shul'geyfer E. G. UMN. 1960. T.15. Vyp. 6(96). Pp.3–52.
9. Basu, A. and R. Blanning, 2007. Springer Science+Business Media, LLC. P.174.
10. Astanin S. V., Zhukovskaya N. K. UBS. 2012. №37. Pp.145–163.