Решение задачи Эйлера об устойчивости стержня с неклассическими граничными условиями

М.М. Шогенова, О.М. Шогенов, Л.А. Барагунова

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова

Аннотация: Традиционные аналитические методы определения критических сил приводят к трудным решениям трансцендентных уравнений, потому не универсальны и малоэффективны для стержней со сложными расчётными схемами. Предлагаемый численно-графический метод определения критических сил может легко адаптироваться к сложным неклассическим задачам.

Ключевые слова: задача Эйлера, стержень, критическая сила, устойчивость, дифференциальные уравнения, граничные условия, метод конечных разностей, собственные значения.

Введение

Задача об устойчивости прямолинейного гибкого сжатого стержня, рассмотренная Леонардом Эйлером в 1744 г., поначалу не была востребованной, так как в те времена в сооружениях типа мостов, виадуков, арок и т.д., применявшиеся сжатые элементы были массивными, из камня, и размеры их сечений были сопоставимы с длиной. Поэтому явление потери устойчивости представляло только теоретический интерес. С течением времени развивалась металлургия, появились сначала чугунные, а затем и стальные конструкции большой длины. Задача Эйлера стала актуальной, её первоначальная расчётная схема стала многообразной со своими формулами критической силы для каждого случая [1-3].

В наше время проблема определения критических сил значительно усложнилась из-за применения неклассических расчётных сложных схем во многих отраслях экономики: строительстве, машино- и станкостроении, сооружениях химической, нефтяной и газовой промышленности, мостостроении и т.д. Если раньше изучались стержни постоянного сечения по длине, то теперь они имеют переменное сечение, являются ступенчатыми. Силы могут быть распределёнными, сосредоточенных сил может быть несколько в разных точках. Все эти новшества привели к разнообразным неклассическим задачам по определению критических сил.

Явление устойчивости очень опасно для прочности стержня, так как стержень при этом разрушается, если материал является хрупким или переходит в текучее состояние с большими деформациями, если материал пластический. В обоих случаях стержень становится непригодным для дальнейшей эксплуатации. Если принять во внимание, что стержни в виде колонн строительных сооружений и деталей механизмов машин и приборов встречаются весьма часто, то можно утверждать, что постановка и решение задач устойчивости являются весьма актуальными.

1.Математическое моделирование

Задача Эйлера в настоящее время математически сформулирована в наиболее простых случаях, как задача для определения собственных значений дифференциального уравнения второго порядка с однородными граничными условиями:

$$v''(x)+k\,v(x)=0,\quad v(0)=v(l)=0,\quad \forall x\in(0,l),\quad k=\frac{F}{b},\quad b=EJ. \qquad (1)$$

Здесь $v(x)$ – функция изогнутой оси стержня, E, J – физико-механические параметры системы, F – сжимающая сила, штрихи в верхних индексах соответствуют производным функции v(x). Необходимо отыскать такие значения F (критические силы), при которых возможны ненулевые решения задачи (1).

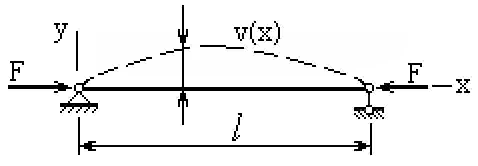


Рис. 1

Данная на рис. 1 расчётная схема имеет граничные условия, соответствующие шарнирному опиранию концов стержня. В классических схемах рассматриваются и некоторые другие граничные условия с применением аналитических методов решения задачи. Данной схемой воспользуемся для тестирования предлагаемого численного метода определения критической силы, при которой из прямолинейной устойчивой формы равновесия стержень переходит в искривлённую форму, показанную пунктиром.

Большое разнообразие способов опирания концов потребовало повышения порядка дифференциального уравнения (1) до четвертого. Для каждого случая аналитическое решение становится затруднительным, так как на конечном этапе приходится решать трансцендентные уравнения для определения собственных значений, т.е. критических сил F_n.Между тем имеется возможность решения данной проблемы более универсальным и простым способом с помощью численных методов [4] и компьютерных вычислительных комплексов. Универсальность численного метода состоит еще в том, что его можно использовать при определении критических сил стержней с переменным сечением по длине.

Рассмотрим вопрос подробно. Уравнение (1) продифференцируем дважды и запишем в традиционной форме:

$$v''''(x)+kv''(x)=0, \quad \forall x\in(0,\, l). \tag{2}$$

К уравнению (2) необходимо присоединить условия опирания концов стержня:

$$\text{на левом конце: } \; v(0)=0, \quad v''(0)=0; \tag{3}$$

$$\text{на правом конце: } \; v(l)=0, \quad v''(l)=0. \tag{4}$$

Данные условия соответствуют отсутствию перемещений концов в поперечном направлении и изгибающих моментов в концевых сечениях. Система уравнений (2) – (4) образуют математическую модель решения задачи по определению критических сил сжатого стержня.

Далее воспользуемся методом конечных разностей. С этой целью заменим в (2) область непрерывного изменения аргумента областью дискретного изменения с шагом $h=l\, l/n$:

$$\Omega_h=\{x_i=(i-1)h, \qquad i=1,\, 2,\, \ldots,\, j\}.$$

Вместо непрерывной функции $\mathrm{v}(\mathrm{x_i})$ будем рассматривать сеточную функцию $\mathrm{y}(\mathrm{x_i})\approx \mathrm{v}(\mathrm{x_i})$ [5-7]. От дифференциальных операторов в (2) - (4) перейдем к разностным:

$$v'(0)\approx \frac{1}{2h}(-3y_1+4y_2-y_3), \quad v'(l)\approx \frac{1}{2h}(y_1-4y_2+3y_3),$$

$$\mathrm{v}''(0)\approx \frac{1}{\mathrm{h}^2}(2\mathrm{y}_1-5\mathrm{y}_2+4\mathrm{y}_3-\mathrm{y}_4), \quad v''(l)\approx \frac{1}{h^2}(-y_{j-3}+4y_{j-2}-5y_{j-1}+2y_j),$$

$$v''(x_i)\approx \frac{1}{h^2}(y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}), \quad v'''(0)\approx \frac{1}{2h^3}(-5y_1+18y_2-24y_3+14y_4-3y_5),$$

$$v'''(l) \approx \frac{1}{2h^3}\left(3y_{j-4} - 14y_{j-3} + 24y_{j-2} - 18y_{j-1} + 5y_j\right),$$

$$v''''(x_i) = \frac{1}{h^4}\left(y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2}\right).$$

В результате таких преобразований вместо (2) – (4) придём к разностным уравнениям для внутрисеточных точек и краевых условий:

$$y_{i-2} - a\,y_{i-1} + b\,y_i - a\,y_{i+1} + y_{i+2} = 0, \qquad i = 3,\ 4, \ldots, j-2. \tag{5}$$

$$a = kh^2 - 4, \quad b = 6 - 2kh^2.$$

(6)

$$y_1 = 0, \quad 2y_1 - 5y_2 + 4y_3 + 4y_3 - y_4 = 0,\ -y_1 + 4y_2 - 5y_3 + 2y_n = 0, \quad y_n = 0. \tag{6}$$

Классической задаче с шарнирными опорами соответствует однородная система линейных алгебраических уравнений относительно компонентов вектора $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_j\}$:

$$\mathrm{CY} = 0. \tag{7}$$

В развёрнутой форме она примет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \ldots & & & & & \\ 2 & -5 & 4 & -1 & & & \ldots & & & & & \\ 1 & a & b & a & 1 & & \ldots & & & & & \\ & 1 & a & b & a & 1 & \ldots & & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & & & 1 & a & b & a & 1 \\ & & & & & & & & -1 & 4 & -5 & 2 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Здесь нулевые элементы не показаны.

Учет граничных условий других расчётных схем будет состоять в том, что в строках 1, 2, n-1, n будут вставляться соответствующие адаптированные элементы матрицы C. Квадратная матрица коэффициентов C порядка n состоит из элементов, которые зависят от k и далее от искомого значения силы F.

Система уравнений (8) имеет тривиальное решение:

$$\mathrm{Y} = 0.$$

которое не представляет практического интереса, так как соответствует исходной прямолинейной форме равновесия. Задача состоит в том, чтобы найти собственные значения F, при которых возможны ненулевые решения. Это требование приводит к характеристическому уравнению:

$$\det C\ (F) = 0. \qquad (9)$$

При больших значениях n развертывание определителя при неизвестном значении F, а далее решение уравнения (9) представляют известные сложности. Они успешно преодолеваются с помощью компьютерных вычислительных комплексов. Возникающие проблемы легко преодолеваются, если воспользоваться возможностями современной вычислительной техники и прикладных программных комплексов (MathCad, MATLAB и т.д.) [8-10]. Последний позволяет легко визуализировать функцию в левой части (9) на экране монитора в координатной системе $F - \det(F)$. Тогда абсцисса точки пересечения соответствующей кривой с осью F будут соответствовать искомым значениям критической силы.

Пример 1. Возьмём для тестирования предлагаемого численно-графического метода алгоритма условный, шарнирно опёртый стержень по рис. 1 с параметрами: $l = \pi$, $EJ = 1$, $j = 1001$, j–количество точек на числовой оси F. E, J – физико-механические параметры системы, F – сжимающая сила.

Как известно, эйлеровы собственные значения такого стержня вычисляются по формуле:

$$F_i = \frac{i^2 \pi^2 EJ}{l^2}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \qquad (10)$$

Следовательно, критические силы [11-13] будут равны следующим числам натурального ряда:

$$F_i = 1, 4, 9 \ldots$$

Составлена программа на языке MATLAB и проведены вычисления, результаты которых прочитаны с экрана монитора (рис. 2). Они совпадают с точными, а именно, отличаются от них на почти неразличимую величину порядка 0,00001. Отсюда вывод: численный метод является простым и эффективным средством определения собственных значений для дифференциальных уравнений.

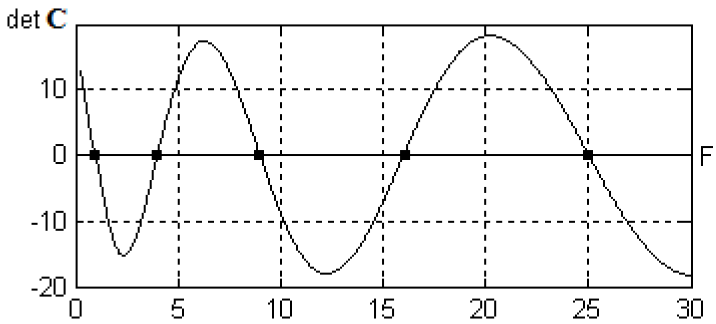


Рис. 2

Далее перейдём к стержням с более сложными расчётными схемами и рассмотрим случай, изображённый на рис. 3. Краевые условия на концах стержня описываются уравнениями:

$$v(0)=0,\quad bv''(0)-c_1v'(0)=0,\quad bv'''(l)-c_2v(l)=0,\quad v'''(l)=0. \tag{11}$$

Здесь c_1, c_2 – коэффициенты жёсткости пружин на концах стержня. Первое и четвёртое условия соответствуют равенству нулю изгибающих моментов в концевых сечениях. Второе и третье условия являются уравнениями равновесия нижнего и верхнего концевых участков стержня.

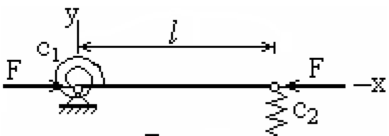


Рис. 3

При переходе на метод конечных разностей краевые условия (9) примут вид:

$$y_1=0,\;\; ay_1+cy_2+dy_3-y_4=0.$$

$$3y_{n-4}-14y_{n-3}+24y_{n-2}+18y_{n-1}+ry_n=0.$$

$$-y_{n-3}+4y_{n-2}-5y_{n-1}+2y_n=0.$$

$$a=2+1{,}5hc_1/b,\quad c=-5-2hc_1/b,\quad d=4+0{,}5hc_1/b,\quad r=5-2h^3c_2/b.$$

Рассмотрим пример стержня, математической моделью которого являются уравнения (2), (9).

Пример 2. Даны значения параметров:

$$l=3\,\text{м},\;\; \text{b}=1500\ \text{Нм}^2,\quad \text{c}_1=1000\,\text{Н/м},\quad \text{c}_2=2000\ \text{Н},\quad \text{n}=6001,\quad \text{m}=1001$$

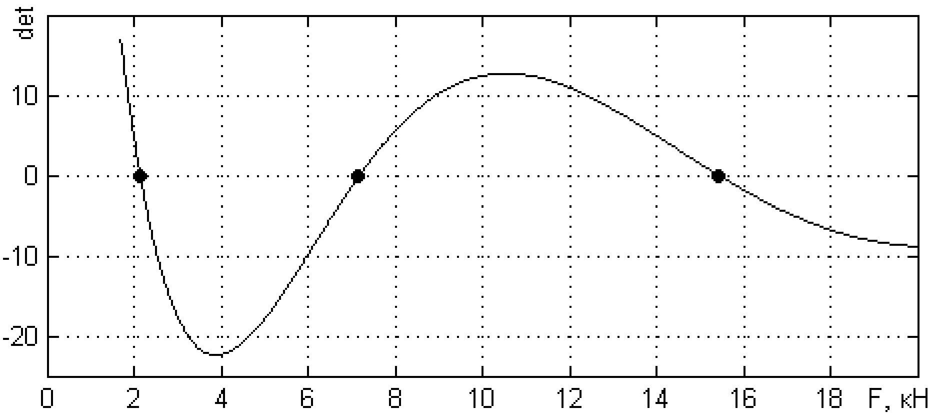
Здесь c_1, c_2 – коэффициенты жёсткости пружин, n, m - количества точек вдоль осей x и F. Определим первые три критические силы.

Система уравнений (8) теперь имеет вид:

$$\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \dots & & & & & \\
a & c & d & -1 & & & \dots & & & & & \\
1 & a & c & a & 1 & & \dots & & & & & \\
 & 1 & a & c & a & 1 & \dots & & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & 1 & a & c & a & 1 \\
 & & & & & & & 3 & -14 & 24 & -18 & r \\
 & & & & & & & & -1 & 4 & -5 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Точки пересечения графика с осью F (рис. 4) дали следующие первые три элемента спектра критических сил:

$$F = \{\ 2{,}149;\quad 7{,}186;\quad 15{,}440\ \}\ \text{кН}.$$



Выводы

1. Традиционные аналитические методы определения критических сил приводят к трудным решениям трансцендентных уравнений или их систем, потому не универсальны и малоэффективны для стержней со сложными расчётными схемами.

2. Предлагаемый и продемонстрированный на двух примерах численно-графический метод определения критических сил может легко адаптироваться к сложным неклассическим задачам.

Литература

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука. 1967. 984 с.

2. Масленников А.М. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник и практикум для вузов. – М. : Издательство Юрайт. 2016. -366 с.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит.,1989. - 432 с.

4. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение. 1978. 312с.

5. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977. 154 с.

6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. М.: Высшая школа, 2002. 840 с.

7. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2005. -425 с.

8. Караманский Т.Д. Численные методы строительной механики. –М.: Стройиздат, 1981. -436 с.

9. Kulterbaev Kh.P., Baragunova L.A., Shogenova M.M., Senov Kh. M. About a High-Precision Graphoanalytical Method of Determination of Critical Forces of an Oblate Rod. Proceedings 2018 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS). September, 24-28, 2018. St. Petersburg. Russia 2018. P. 794-796.

10. Литвинов С.В., Языев Б.М., Бескопыльный А.Н., Ананьев И.В. Расчёт на устойчивость стержней из ЭДТ-10 при начальной погиби стержня в виде S-образной кривой. // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/620/.

11. Барагунова Л.А. Устойчивость предварительно сжимаемой арматуры в железобетонных балках. // Инженерный вестник Дона, 2016, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2016/3797/.

12. Wafa F., Hasnat Abul, Akhtaruzzaman Ali A. Prestressed Concrete Beams with Opening under and Bending //Journal of Structural Engineering – ASCE. 1989. - N. 11. Vol. 115. PP. 2727-2739.

13. Sargin M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections. SM study, №4, Solid Mechanical Division, University of Waterloo. Ontario, Canada. – 1970. p. 167.

References

1. Vol'mir A.S. Ustojchivost' deformiruemyh sistem. [Stability of deformable systems]. M.: Nauka. 1967. 984 p.

2. Maslennikov A.M. Dinamika i ustojchivost' sooruzhenij. Uchebnik i praktikum dlja vuzov. [Dynamics and stability of structures. Textbook and workshop for universities]. M.: Izdatel'stvo Jurajt. 2016. 366 p.

3. Samarskij A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. M.: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit.,1989. 432 p.

4. Alfutov N.A. Osnovy raschjota na ustojchivost' uprugih sistem. [Fundamentals of calculation on the stability of elastic systems]. M.: Mashinostroenie. 1978. 312 p.

5. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachah raschjota stroitel'nyh konstrukcij. [The method of grids in the problems of calculating building structures]. M.: Strojizdat, 1977. 154 p.

6. Verzhbickij V.M. Osnovy chislennyh metodov. [Fundamentals of Numerical Methods]. M.: Vysshaja shkola, 2002. 840 p.

7. Il'in V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M. Chislennye metody reshenija zadach stroitel'noj mehaniki. [Numerical methods for solving problems of structural mechanics]. M.: Izd-vo ASV; SPb. SPbGASU, 2005. 425 p.

8. Karamanskij T.D. Chislennye metody stroitel'noj mehaniki. [Numerical methods of structural mechanics]. M.: Strojizdat, 1981. 436 p.

9. Kulterbaev Kh.P, Baragunova L.A., Shogenova M.M., Senov Kh. M. About a High-Precision Graphoanalytical Method of Determination of Critical Forces of an Oblate Rod. Proceedings 2018 IEEE International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies" (IT&QM&IS). September, 24-28, 2018. St. Petersburg. Russia 2018. R. 794-796.

10. Litvinov S.V., Yazyev B.M., Beskopyl'nyy A.N., Anan'ev I.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2012/250/.

11. Baragunova L.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2016, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2016/3797/.

12. Wafa F., Hasnat Abul, Akhtaruzzaman Ali A. Prestressed Concrete Beams with Opening under and Bending Journal of Structural Engineering ASCE. 1989. N. 11. Vol. 115. pp. 2727-2739.

13. Sargin M. SM study, №4. Solid Mechanical Division, University of Waterloo. Ontario, Canada. 1970. 167 p.