Исследование воздействия векторных случайных нагрузок на балки

А.М. Казиев, В.Х. Хуранов, О.В.Костенко

ФГБОУ ВО «Кабардино-Балкарский государственный университет им Х.М. Бербекова», Нальчик, Россия

Аннотация: Исследованы поперечные колебания балок постоянного сечения с учётом демпфирования. Рассмотрены случайные колебания балки под действием векторных кинематических и динамических воздействий. На примерах показаны влияние коэффициентов корреляции на среднеквадратические отклонения сечений балки. Определены внутренние силы в виде изгибающих моментов и поперечных сил. Приведён пример действия случайного процесса со скрытой периодичностью.

Ключевые слова: балка, демпфирование, прогиб, изгибающий момент, поперечная сила, случайный процесс, спектральная матрица, корреляция, вектор, матрица, передаточная функция.

Балки и колонны в виде стержней постоянного сечения самые распространённые конструктивные несущие элементы, применяемые в строительстве и в других областях. Многие внешние воздействия имеют случайный характер [1], [2], [3]. Эти действия могут быть динамическими, кинематическими [4] и комбинированными [5]. Действие таких нагрузок, в виде случайного процесса со скрытой периодичностью, исследовалось автором в статье [6]. Этим вопросам посвящались и работы зарубежных [7-9] и отечественных авторов [10], [11].

В данной работе автор рассматривает одновременное действие таких нагрузок. Причём учитывается их матрица коэффициентов корреляции, с помощью которого можно регулировать их «синфазность». Получены формулы для определения перемещений, изгибающих моментов и поперечных сил.

Вынужденные случайные колебания

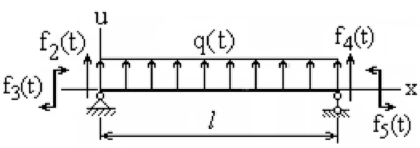


Рис. 1. Установившиеся колебания балкис шарнирно опертыми концами (рис.1) в общей постановке имеет вид

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + a^4 u^{\mathrm{IV}} = f_1(t),\ f_1(t) = q(t)/\rho S\ , x \in (0,\ l)\ , t > -\ \infty .$$

$$u(0,t)\ =\ f_2(t),\ \ EJu''(0,\ t) = f_3(t). \qquad u(l,\ t) =\ f_4(t),\ \ EJu''(l,\ t) = f_5(t).$$

Допустим на балку действует возмущение, которое является случайным стационарным и векторным

$$\boldsymbol{f}(x,\ t) = \{f_1(t),\ \ f_2(t),\ \ f_3(t),\ \ f_4(t),\ \ f_5(t)\ \},$$

где компоненты являются стационарно связанными, математическим ожиданием равным нулю и с заданной спектральной матрицей

$$\boldsymbol{S}_f(\omega) = \begin{pmatrix} s_{11}(\omega) & s_{12}(\omega) & \cdots & s_{15}(\omega) \\ s_{21}(\omega) & s_{22}(\omega) & \cdots & s_{25}(\omega) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{51}(\omega) & s_{52}(\omega) & \cdots & s_{55}(\omega) \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

и являющуюся эрмитовой, и в результате чего$s_{ij}(\omega) = s^{*}_{ji}(\omega)$.

В установившемся режиме$u(x,t)$- центрировано пространственно-временное случайное поле, стационарное во времени и неоднородное в пространственной координате. Далее ставится задача имея спектральную матрицу входного случайного процесса необходимо определить спектральную плотность и дисперсию выходного процесса. Функция математического ожидания перемещений сеченийбалки по заданному вектору математических ожиданий возмущений$\boldsymbol{m}_f(x) = \{\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ m_5\ \}$ является традиционной.

Для этого используем передаточные функции

$$H_j(x,\ i\Omega_j), \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 5.$$

Спектральная плотность случайного процесса колебаний вычисляется по следующей формуле

$$S_u(x,\omega) = \sum_k \sum_j H_k(x,i\omega) H_j^*(x,\, i\omega)\, s_{kj}(\omega).$$

В векторно-матричной форме

$$S_u(x,\omega) = H^T(x,\, i\omega) S_f(\omega) H^*(x,\, i\omega), \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{H}(x,\, i\omega)$ – вектор-столбец.

Теперь дисперсия отклонений определяется по известному соотношению

$$D_u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S_u(x,\, \omega)\, d\omega. \qquad (3)$$

И учитывая чётностьS_u, можно сократить вычисления

$$D_u(x) = 2\int_0^{\infty} S_u(x,\, \omega)\, d\omega.$$

Введём вектор

$$\boldsymbol{X} = \{\, x_1, x_2, \ldots, x_n \,\}, \qquad x_j = (j-1)\Delta x, \qquad j = 1, 2, \ldots , n,$$

Δx - шаг разбивки. Вектор$\boldsymbol{X}$устанавливается в соответствии со значением функции спектральной плотности

$$S_u(x_j,\, \omega) = \boldsymbol{H}^T(x_j,\, i\omega)\, \boldsymbol{S}_f(\omega)\, \boldsymbol{H}^*(x_j,\, i\omega), \quad j = 1, 2, \ldots$$

определяемой формулой (2). Здесь

$$\mathbf{H}(x_j,\, i\omega) = \{\mathrm{H}_1(x_j,\, i\omega),\ \mathrm{H}_2(x_j,\, i\omega),\ \mathrm{H}_3(x_j,\, i\omega),\ H_4(x_j, i\omega),\ H_5(x_j,\, i\omega)\}^T$$

– вектор-столбец передаточных функций.

Введём норму для функции $S_u(x_j, \omega)$, учитывая то, что спектральная плотность является положительной величиной, её запишем в виде

$$\|\, S_u(X,\, \omega)\, \| = \sum_{j=1}^{n} S_u(x_j,\, \omega), \quad \omega \in [0,\ \infty). \qquad (4)$$

Постепенно увеличивая ω норма (4) будет уменьшаться. Тогда с большим шагом увеличивая ω, можно найти её наименьшее значение Ω, которое удовлетворяет условию

$$\left\| S_u\left(x_j, \Omega\right) \right\| < \mu ,$$

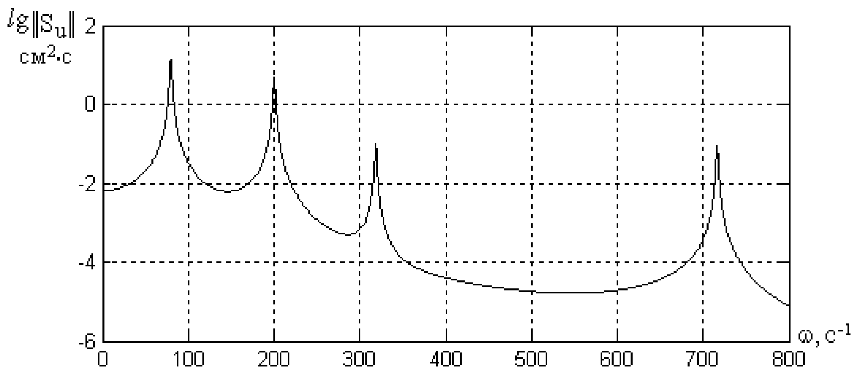
где μ – малое положительное число, от которого зависит точность вычислений.

Пример. Возьмём стальную балку сечением двутавр № 14,l = 6 м, ρ = 7850 кг/ м^3, E = 210 ГПа, S = 17, 4 $см^2$,J = 573 см^4, ε = 0.9c^{-1}.

Векторный процесс возмущения примем стационарным со стационарно связанными компонентами и скрытой периодичностью. Элементы матрицы (1) примут вид

$$s^f_{jk}(\omega) = \frac{2\alpha_{jk}\theta^2_{jk}\rho_{jk}\sigma_j\sigma_k}{\pi\left[\left(\omega^2-\theta^2_{jk}\right)^2+4\alpha^2_{jk}\omega^2\right]}, \qquad \theta^2_{jk}=\alpha^2_{jk}+\beta^2_{jk}, \qquad j,\ k=1,\ 2,\dots,\ 5.$$

Здесь α_{jk}- параметр широкополосности, $\beta_{jk-=}$- характерная частота, ρ_{jk}- элементы нормированной корреляционной матрицы, σ_j- среднеквадратические отклонения процессов $f_j(t)$.



σ_q = 760 Н/м, σ_2 = 5 мм, σ_3 = 1800 Нм, σ_4 = 9мм, σ_5 = 950 Нм.

β_{jk} = 2 с$^{-1}$ (кривая 1), 35 с$^{-1}$ (2), 46 с$^{-1}$ (3), 310 с$^{-1}$ (4), 620 с$^{-1}$ (5);

$j, k = 1, 2,\ldots, 5.$

Нумерация кривых указана по рис. 3, где приводятся результаты вычислений. Параметры широкополосности примем

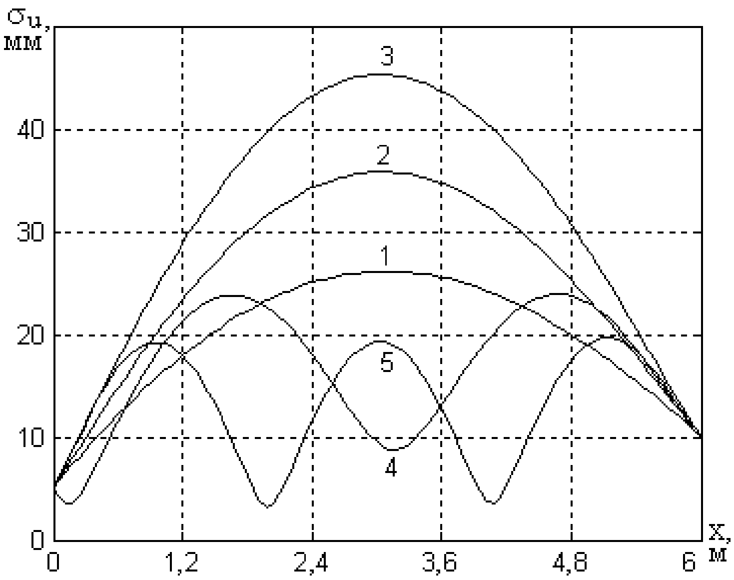
α_{jk} = 0.9 с$^{-1}$, $j, k = 1, 2, \ldots 5.$

Рис. 2. Зависимость нормы спектральной плотности

Элементы нормированной корреляционной матрицы приравняем к единице со знаками, которые учитывают направления

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наивысший предел и минимальный шаг интегрирования определяется по методу, описанному выше. График нормы спектральной плотности (4) примет вид, показанный на рис 2 при следующих частотах



β_{jk} = 210 с$^{-1}$, $j, k = 1, 2, \ldots, 5.$

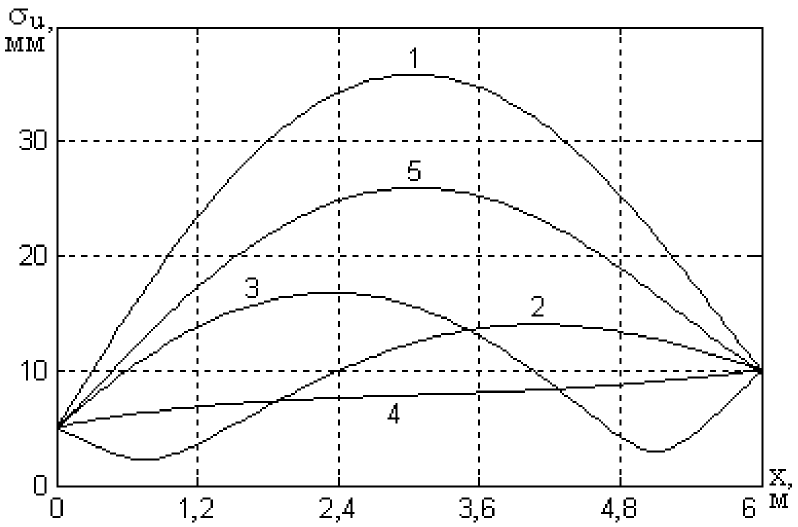
Как видно по графику максимумы собственных частот 319,4 с$^{-1}$ и 716,5 и далее практически неразличимы. Для построения графика использована функция десятичного логарифма. Максимумы на первой собственной частоте

Рис. 3. Влияние характерной частоты возмущений на среднеквадратические отклонения перемещений.

79,6 c^{-1} и характерной частоте возмущений 210 c^{-1}существенно больше, чем на обертонах. Поэтому большое значение будет иметь интегрирование в области, находящихся близко к указанным частотам. Предел интегрирования Ω можно принят равным 500 c^{-1}. Шаг интегрирования при этом был равным 0,05 c^{-1}.

Для изучения влияния коррелированности случайных возмущений промоделируем с помощью пяти соответствующих нормированных корреляционных матриц

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$



$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Рис. 4. Влияние коррелированности компонентов вектора возмущений на среднеквадратические отклонения

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведём вычисления при фиксированных значениях характерных частот

$$\beta_{jk} = 10 \text{ c}^{-1}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Результаты представлены на рис. 4, где номера кривых соответствуют номерам корреляционных матриц. Нормированная корреляционная матрица в случайных колебаниях играет ту же роль, что и сдвиги фаз возмущений в гармонических колебаниях.

Максимум и шаг интегрирования, следующие $\Omega = 510$ с$^{-1}$, $\Delta\omega = 0{,}10$ с$^{-1}$.

Внутренние силы в поперечных сечениях

Для анализа прочности балки необходимо знать величину изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях балки. Как известно, у балки между прогибами и внутренними силами существуют соотношения

$$M(x,t) = EJu''(x,t), \qquad Q(x,t) = EJu'''(x,t). \tag{5}$$

Через функции u(x, t) можно найти внутренние силы.

При гармонических возмущениях общая формула определения перемещений имеет вид произведения векторов

$$u(x,\ t) = [\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{v}(x,t)] = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}(x,t).$$

Применение операций (4) даёт

$$M(x,t) = EJA^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}''(x,t), \qquad Q(x,t) = EJA^T\boldsymbol{v}'''(x,t). \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{v}$ – ранее принятые обозначения для векторов комплексных амплитуд возмущений и функций перемещений. Последние, в свою очередь, определяются через передаточные функции

$$v_k(x,\ t) = H_k(x,\ i\Omega_1)\ e^{i\Omega_k t}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 5.$$

Следовательно,

$$v_k''(x,t) = H_k''(x,i\Omega)\,e^{i\Omega_k t}, \qquad v_k'''(x,t) = H_k'''(x,i\Omega)\,e^{i\Omega_k t}. \quad k = 1, 2, \ldots, 5. \tag{7}$$

Передаточные функции изгибающего момента и поперечной силы

$$H_1^M(x,\ i\Omega_1) = H_1''(x,\ i\Omega_1) = b^2(-C_1\sin bx - C_2\cos bx + C_3\,\mathrm{sh}\,bx + C_4\,\mathrm{ch}\,bx). \tag{8}$$

$$H_1^Q(x,\ i\Omega_1) = H_1'''(x,\ i\Omega_1) = b^3(-C_1\cos bx + C_2\sin bx + C_3\,\mathrm{ch}\,bx + C_4\,\mathrm{sh}\,bx). \tag{9}$$

Производные других передаточных функций находятся аналогично

$$H_2^M(x, i\Omega_2) = H_2''(x, i\Omega_2) = b^2\,[-C_1 \sin b(l-x) + C_3\,\mathrm{sh}\,b(l-x)], \tag{10}$$

$$H_2^Q(x, i\Omega_2) = H_2'''(x, i\Omega_2) = b^3\,[C_1 \cos b(l-x) - C_3\,\mathrm{ch}\,b(l-x)], \tag{11}$$

$$H_3^M(x, i\Omega_3) = H_3''(x, i\Omega_3) = b^2\,[-C_1 \sin b(l-x) + C_3\,\mathrm{sh}\,b(l-x)], \tag{12}$$

$$H_3^Q(x, i\Omega_3) = H_3'''(x, i\Omega_3) = b^3\,[C_1 \cos b(l-x) - C_3\,\mathrm{ch}\,b(l-x)], \tag{13}$$

$$H_4^M(x, i\Omega_4) = H_4''(x, i\Omega_4) = b^2\,(-C_1 \sin bx + C_3\,\mathrm{sh}\,bx), \tag{14}$$

$$H_4^Q(x, i\Omega_4) = H_4'''(x, i\Omega_4) = b^3\,(-C_1 \cos bx + C_3\,\mathrm{ch}\,bx), \tag{15}$$

$$H_5^M(x, i\Omega_5) = H_4''(x, i\Omega_5) = b^2\,(-C_1 \sin bx + C_3\,\mathrm{sh}\,bx), \tag{16}$$

$$H_5^Q(x, i\Omega_5) = H_5'''(x, i\Omega_5) = b^3\,(-C_1 \cos bx + C_3\,\mathrm{ch}\,bx). \tag{17}$$

Для случайных колебаний задача сводится к определению спектральной плотности, а затем и дисперсии внутренних сил по заданной спектральной матрице возмущений. Соотношения между спектральными плотностями внутренних сил и возмущений аналогичны (2)

$$S_M(x,\omega) = \boldsymbol{H}_M^T(x, i\omega)\,\boldsymbol{S}_f(\omega)\,\boldsymbol{H}_M^*(x, i\omega)(EJ)^2,$$

$$S_Q(x,\omega) = \boldsymbol{H}_Q^T(x, i\omega)\,\boldsymbol{S}_f(\omega)\,\boldsymbol{H}_Q^*(x, i\omega)(EJ)^2.$$

Соответствующие дисперсии определяются с помощью интегралов

$$D_M(x) = 2\int_0^\infty S_M(x,\omega)\,d\omega,\; D_Q(x) = 2\int_0^\infty S_Q(x,\omega)\,d\omega. \tag{18}$$

Интегрирование в (18) проведем численным методом по алгоритмам, которые применяются для вычисления дисперсии перемещений.

По известным характеристикам прогибов и внутренних сил, можно определить характеристики нормальных и касательных напряжений при помощи линейных отображений. По известным методам решаем вопросы прочности, выносливости и жёсткости балки.

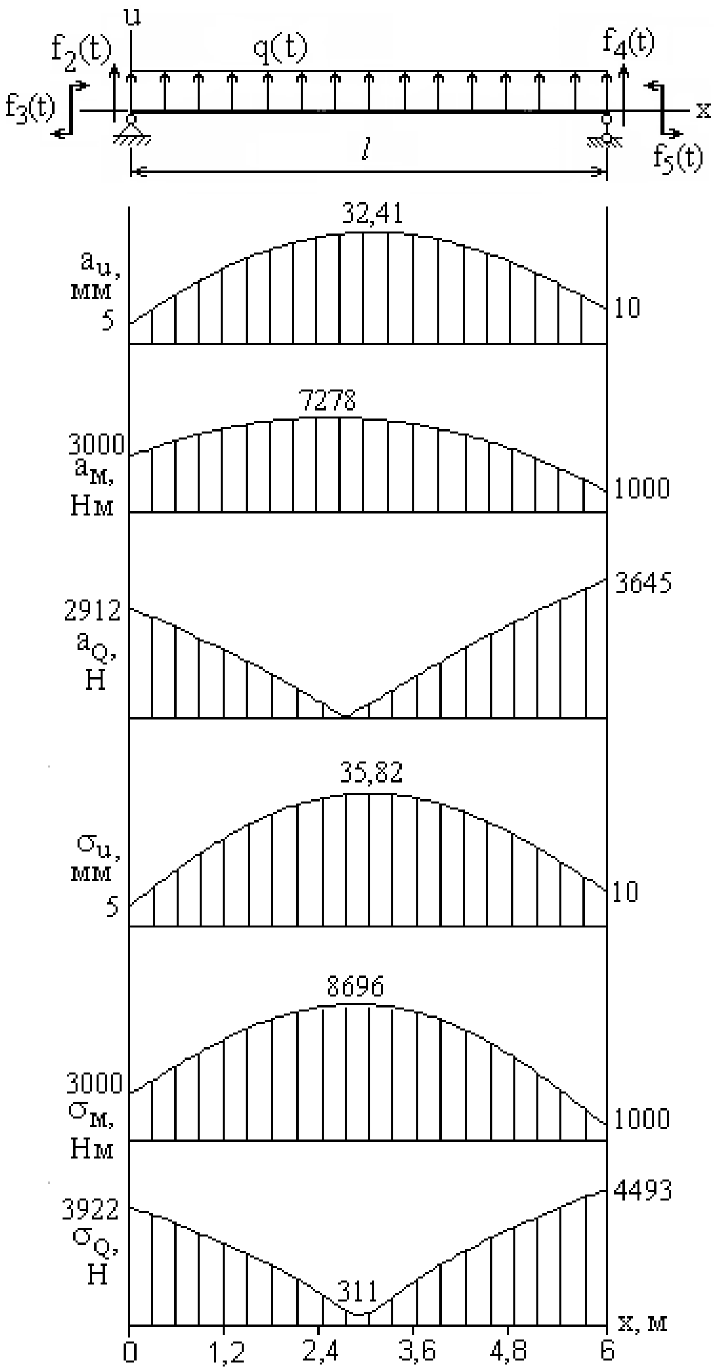


Рис. 5. Эпюры амплитуд и среднеквадратических отклонений перемещений, изгибающих моментов

<u>*Пример.*</u> Для выполнения вычислений возьмём ту же стальную балку из двутавра № 14 со свободно опертыми концами, которая рассмотрена выше, и имеет параметры l = 6 м, $\rho = 7850$ кг/ м^3, $E = 210$ ГПа, S = 17, 4 см^2 ,J = 573 см^4, ε = 1 с$^{-1}$,β_{jk} = 16 с$^{-1}$ (2), σ_q =800 Н/м, σ_2 = 6 мм, σ_3 = 2500 Нм, σ_4 = 9 мм, σ_5 = 2000 Нм.

С использованием полученных формул проведены вычисления и построены эпюры амплитуд и среднеквадратических отклонений, показанные графиками рис. 5. Анализ форм этих кривых подтверждает зависимости между *u, M* и *Q*, хорошо известные из курса сопротивления материалов.

Литература

1. Болотин В.В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука,1979.335 с.

2.Вентцель Е.С. Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и её инженерные приложения. М.: Высш. шк., 2000. 383 с.

3.Вольмир А.С., Культербаев Х.П. Стохастическая устойчивость вынужденных нелинейных колебаний оболочек. ПММ.1974.Т.38, вып.5. С. 893-898.

4. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые случайные колебания балок. Инженерно-технические науки.Материалы научно-практической конференции 1994.Нальчик: Каб.-Балк. гос. с/х акад. 1995.Ч. 3. С. 23-27.

5. Культербаев Х.П., Казиев А.М., О случайных колебаниях растянутых балок. Математическое моделирование и краевые задачи. Самара: Сам. гос. тех. ун-т. 2003. С. 100-103.

6. Казиев А.М., О влиянии характерной частоты и широкополосности случайной нагрузки на колебания балок. Вопросы повышения эффективности строительства. Межвузовский сборник. Нальчик: КБГСХА, 2004. Вып. 2. С. 79-83.

7. Gajewski Antoni. Vibrations and stability of a non-conservatively compressed prismatic column under nonlinear creep conditions. J. Theor. and Appl. Mech. (Poland)., 2000. 38. – № 2. – pp. 259-270.

8. Keltie R.F., Cheng C.C. Vibration reduction of a mass-loaded beam. J. Sound and Vibr, 1995. № 2, pp. 213-228.

9. Simion F.P., Decolon Chr., Staicu St. Study of vibrations in a rod submit to viscous frictions. Sci. Bull. D. "Politehn." Univ. Bucharest., 1998.№ 1. pp. 55-59.

10. Хуранов В.Х., Лихов З.Р., Казиев А.М., Шерибов Ш.М. Железобетонные ребристые плиты покрытий с переменным усилием преднапряжения вдоль пролета // Инженерный вестник Дона, 2015, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2015/2893.

11. Шогенов Б.В., Ногеров И.А., Казиев А.М. К вопросу о снижении шума в зубчато-ременных передачах // Инженерный вестник Дона, 2015, №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2015/3269.

References

1. BolotinV.V. Sluchajnye kolebaniya uprugih sistem [Random oscillation sofelastic systems] M.: Nauka, 1979. 335 p.

2. Ventcel' E.S. Ovcharov L.A. Teoriya sluchajnyh processov i eyo inzhenernye prilozheniya. [The theory of random processes and its engineering applications] M.: Vyssh. shk., 2000. 383p.

3. Vol'mir A.S., Kul'terbaev H.P. Stohasticheskaya ustojchivost' vynuzhdennyh nelinejnyh kolebanij obolochek. PMM. 1974. T.38, vyp.5. pp. 893-898.

4. Kul'terbaev H.P. Kinematicheski vozbuzhdaemye sluchajnye kolebaniya balok. Inzhenerno-tekhncheskie nauki. Materialy nauchno-prakticheskoj konferencii 1994.Nal'chik: Kab.-Balk. gos. s/h akad. 1995. CH. 3. pp. 23-27.

5. Kul'terbaev H.P., Kaziev A.M., O sluchajnyh kolebaniyah rastyanutyh balok. Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi. Samara: Sam. gos. tekh. un-t. 2003. pp. 100-103.

6. Kaziev A.M., O vliyanii harakternoj chastity i shirokopolosnosti sluchajnoj nagruzki na kolebaniya balok. Voprosy povysheniya ehffektivnosti stroitel'stva. Mezhvuzovskij sbornik. Nal'chik: KBGSKHA, 2004. Vyp. 2. pp. 79-83.

7. Gajewski Antoni. Vibrations and stability of a non-conservatively compressed prismatic column under nonlinear creep conditions. J. Theor. and Appl. Mech. (Poland)., 2000. 38. № 2. pp. 259-270.

8. Keltie R.F., Cheng C.C. Vibration reduction of a mass-loaded beam. J. Sound and Vibr, 1995. № 2, pp. 213-228.

9. Simion F.P., Decolon Chr., Staicu St. Study of vibrations in a rod submit to viscous frictions. Sci. Bull. D. "Politehn." Univ. Bucharest, 1998. № 1. pp. 55-59.

10. Khuranov V.Kh, Lihov Z.R., Kaziev A.M., Sheribov Sh.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №2. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n2y2015/2893.
11. Shogenov B.V., Nogerov I.A., Kaziev A.M. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2015/3269.