

Линейная задача дополнительности в динамическом расчете балок на односторонних опорах

А.Д. Ловцов

Тихоокеанский государственный университет, Хабаровск

Аннотация: На примере балок рассматривается динамика систем с односторонними связями. Предложен алгоритм расчета таких систем, как комбинация шаговых метода Ньюмарка и алгоритма Лемке, определяющего рабочую схему балки на каждом временном шаге. Рассмотрены модельные задачи при гармонической возбуждающей силе, внезапно приложенной силе, импульсном воздействии. Исследована численная сходимость решения при сгущении временной сетки. Показано, что точность решения существенно зависит от определения момента смены рабочих схем, поскольку погрешность решения нарастает с увеличением событий «включение/выключение» односторонних связей.

Ключевые слова: конструктивная нелинейность, односторонние связи, линейная задача дополнительности, алгоритм Лемке, динамика сооружений, метод Ньюмарка.

Системы с односторонними связями относятся к конструктивно нелинейным, поскольку их расчетная (рабочая) схема зависит от величины и направления приложенной нагрузки. Односторонность связи определяется ее способностью работать только в одном направлении. Примером служат элементы конструкции, работающие только на растяжение (трос) или только на сжатие (опора). Кроме того, как реализацию односторонней связи можно трактовать достижение предельного состояния сечением стержня, материал которого работает по диаграмме Прандтля (пластический шарнир, например). В этой ситуации сечение не способно воспринять возрастающую нагрузку – связь выключилась из работы. Однако при разгрузке сечение уже способно воспринимать нагрузку – связь включилась в работу. Это свойство широко используется, например, для обеспечения сейсмостойкости конструкций устройством энергопоглотителей или кинематических опор [1, 2].

Таким образом, задача динамического расчета конструктивно нелинейных систем актуальна.

Методы динамического расчета таких систем, как правило, представляют собой комбинацию шагового алгоритма по временной координате (часто это семейство схем интегрирования Ньюмарка [3]) и итерационного алгоритма [4] решения квазистатической конструктивно нелинейной задачи по пространственной координате [5-7]. Указанные методы относятся к так называемым «событийно-ориентированным» методам, поскольку фиксируют события включения/выключения односторонних связей [3]. Другая группа методов сводит уравнения движения к системе интегральных уравнений относительно, например [8], сил взаимодействия и взаимных перемещений в односторонних связях.

В статье предлагается для квазистатического расчета использовать эффективную модификацию алгоритма Лемке, названную в [9] методом перемещений. Указанный алгоритм является шаговым – позволяющим получить решение за конечное число шагов. Таким образом, разработанный алгоритм динамического расчета представляет собой комбинацию двух шаговых методов – метода Ньюмарка и алгоритма Лемке в форме метода перемещений.

Статический расчет конструктивно нелинейных задач рассмотрим на примере балки, опертой на систему жестких двусторонних и односторонних опор (рис. 1, а). Конечно-элементная расчетная схема балки показана на рис. 1, б.

Из всей совокупности степеней свободы сетки КЭ выделим те, которые взаимодействуют с односторонними опорами. Назовем их контактными степенями свободы (рис. 1, в) и вектор перемещений, составленный из них, обозначим \mathbf{z}_c . Вектор перемещений \mathbf{z} МКЭ, таким образом, можно записать в виде $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_c \quad \mathbf{z}_{nc})^T$, где \mathbf{z}_{nc} – неконтактные степени свободы КЭ-сетки.

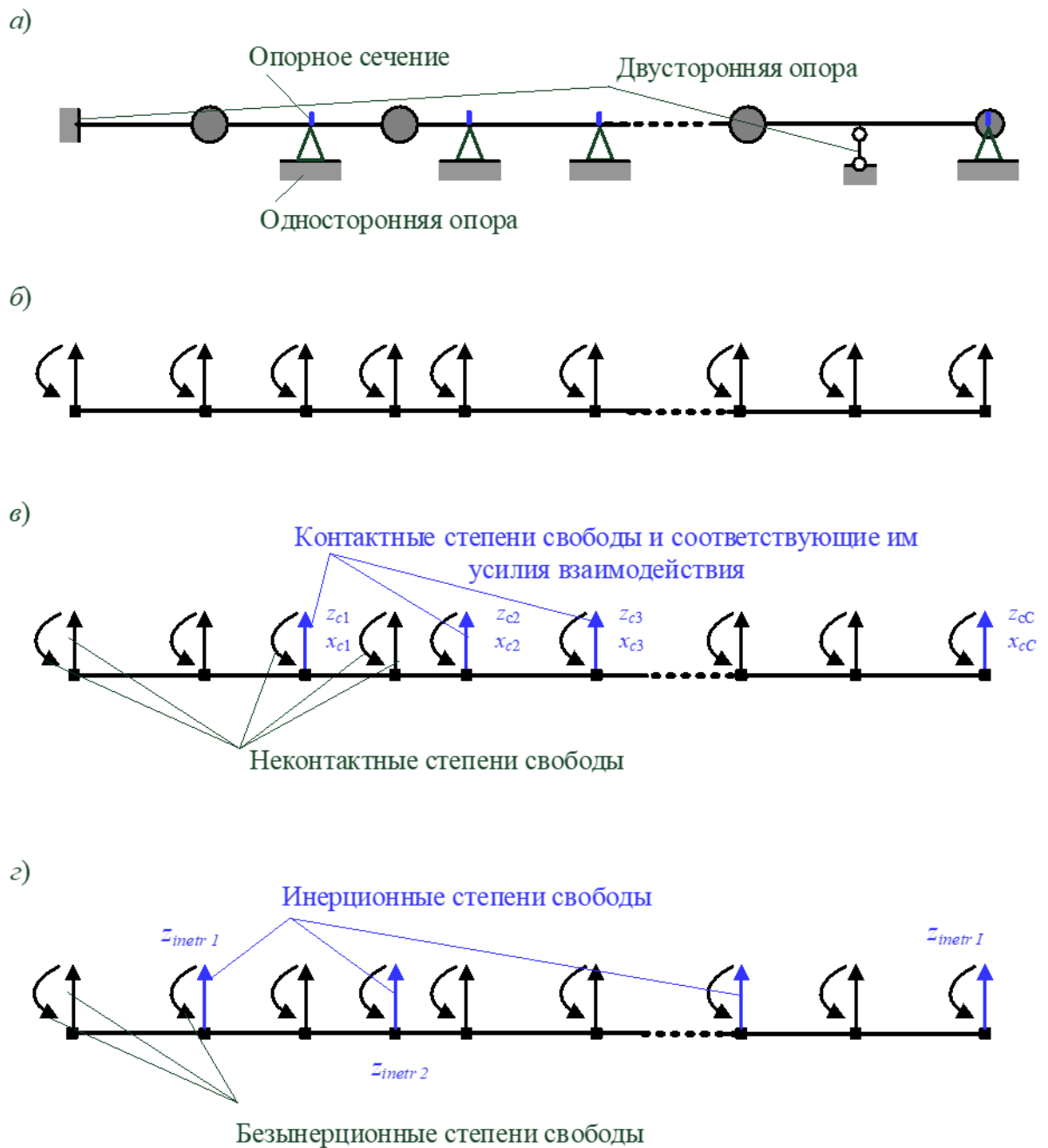


Рис. 1. Расчетная схема балки: а – схема балки; б – конечно-элементная расчетная схема; в – контактные и неконтактные степени свободы; г – инерционные и безынерционные степени свободы

Разрешающая система уравнений «стандартного» МКЭ в общем виде

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{R}_f, \quad (1)$$

где \mathbf{R} , \mathbf{R}_f – матрица жесткости (МЖ) и грузовой вектор (ГВ) МКЭ имеют следующую структуру:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{c,c} & \mathbf{r}_{c,nc} \\ \mathbf{r}_{nc,c} & \mathbf{r}_{nc,nc} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\mathbf{R}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{fc} \\ \mathbf{R}_{fnc} \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений (1) можно переписать в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{R}_f,$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Здесь \mathbf{x} – обобщенные усилия (усилия во введенных связях КЭ-сетки). Равенство нулю этих усилий можно интерпретировать как требование уравновесить узел КЭ-сетки внутренними усилиями элементов, составляющих этот узел (отсутствие усилий во введенных связях).

Усилия взаимодействия опорного сечения балки и односторонней опоры по направлениям компонент \mathbf{z}_c обозначим \mathbf{x}_c (рис. 1, в).

Тогда для конструкции с односторонними связями разрешающей является система уравнений и неравенств [9]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_c \\ \mathbf{x}_{nc} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{c,c} & \mathbf{r}_{c,nc} \\ \mathbf{r}_{nc,c} & \mathbf{r}_{nc,nc} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{z}_c \\ \mathbf{z}_{nc} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{fc} \\ \mathbf{R}_{fnc} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{x}_c \geq \mathbf{0};$$

$$\mathbf{x}_{nc} = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{z}_c \geq \mathbf{0};$$

$$\mathbf{x}_c^T \cdot \mathbf{z}_c = 0.$$

Компоненты вектора \mathbf{z}_{nc} не имеют ограничений на знак.

Из условия $\mathbf{x}_{nc} = \mathbf{0}$, используя второе матричное уравнение, получаем:

$$\mathbf{r}_{nc,c} \cdot \mathbf{z}_c + \mathbf{r}_{nc,nc} \cdot \mathbf{z}_{nc} = \mathbf{R}_{fnc}$$

Откуда, если $\mathbf{r}_{nc,nc}$ не вырождена:

$$\mathbf{z}_{nc} = \mathbf{r}_{nc,nc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{fnc} - \mathbf{r}_{nc,nc}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{nc,c} \cdot \mathbf{z}_c,$$

что позволяет провести процедуру конденсации контактных степеней свободы. Воспользуемся для этого первым матричным уравнением:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{r}_{c,c} \cdot \mathbf{z}_c + \mathbf{r}_{c,nc} \cdot \mathbf{z}_{nc} - \mathbf{R}_{fc}.$$

Подставим в него выражение для \mathbf{z}_{nc} :

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{r}_{c,c} \cdot \mathbf{z}_c + \mathbf{r}_{c,nc} \cdot (\mathbf{r}_{nc,nc}^{-1} \cdot \mathbf{R}_{fnc} - \mathbf{r}_{nc,nc}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{nc,c} \cdot \mathbf{z}_c) - \mathbf{R}_{fc}$$

и получим:

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{z}_c + \mathbf{r}_{fc},$$

Где:

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_{c,c} - \mathbf{r}_{c,nc} \cdot \mathbf{r}_{nc,nc}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{nc,c} \quad (3)$$

– контактная МЖ,

$$\mathbf{r}_{fc} = (\mathbf{r}_{c,nc} \cdot \mathbf{r}_{nc,nc}^{-1} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{R}_{fc} \quad (4)$$

– контактный ГВ.

Тогда система уравнений и неравенств будет представлять собой стандартную линейную задачу дополненности (ЛЗД):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_c &= \mathbf{r}_c \cdot \mathbf{z}_c + \mathbf{r}_{fc}; \\ \mathbf{x}_c &\geq 0; \\ \mathbf{z}_c &\geq 0; \\ \mathbf{x}_c^T \cdot \mathbf{z}_c &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для решения ЛЗД (5) используем модификацию алгоритма Лемке в форме метода перемещений [9].

Отметим, что $\mathbf{r}_{nc,nc}$ становится вырожденной только в том случае, если основная система метода перемещений ЛЗД (получаемая из заданной превращением всех односторонних связей в двусторонние) мгновенно изменяема.

Обратимся далее к **динамической стороне задачи**.

Инерционные свойства конструкции аппроксимируем массами, сосредоточенными в узлах КЭ-сетки (рис. 1, а). Таким образом, силы инерции возникают только по направлению линейных перемещений узлов. Сформируем из таких перемещений вектор \mathbf{z}_{inert} . Из оставшихся степеней свободы сформируем вектор \mathbf{z}_0 (рис. 1, б).

Уравнение движения системы с односторонними связями при дискретизации задачи методом конечных элементов запишем в виде:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{R}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{F}(t). \quad (6)$$

Здесь: вектор перемещений $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_{inert} \quad \mathbf{z}_0)^T$ содержит инерционные \mathbf{z}_{inert} и безынерционные \mathbf{z}_0 степени свободы;

матрица масс \mathbf{M} содержит на главной диагонали величины масс m_j ($j = 1, I$), соответствующих инерционным степеням свободы:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_I \end{bmatrix};$$

матрица демпфирования:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}; \quad (8)$$

векторы ускорений и скоростей имеют следующую структуру $\ddot{\mathbf{z}} = (\ddot{\mathbf{z}}_{inert} \quad \ddot{\mathbf{z}}_0)^T$,

$$\dot{\mathbf{z}} = (\dot{\mathbf{z}}_{inert} \quad \dot{\mathbf{z}}_0)^T;$$

матрицу жесткости МКЭ можно разбить на блоки, соответствующие структуре вектора \mathbf{z} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{inert} & \mathbf{r}_{inert,0} \\ \mathbf{r}_{0,inert} & \mathbf{r}_{0,0} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Отметим, что матрица жесткости $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{z})$, поскольку при смене рабочих схем меняются условия опирания конструкции на односторонние связи.

Перепишем уравнения движения (6) с учетом (7), (8), (9) в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{inert} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_{inert} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{inert} & \mathbf{r}_{inert,0} \\ \mathbf{r}_{0,inert} & \mathbf{r}_{0,0} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{z}_{inert} \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{inert}(t) \\ \mathbf{F}_0(t) \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{F}_{inert}(t)$, $\mathbf{F}_0(t)$ – векторы внешних сил, приложенных по направлению инерционных и безынерционных степеней свободы. Таким образом, система уравнений представляет собой совокупность связанных дифференциальных и алгебраических матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{z}}_{inert} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{z}_{inert} + \mathbf{r}_{inert} \cdot \mathbf{z}_{inert} + \mathbf{r}_{inert,0} \cdot \mathbf{z}_0 &= \mathbf{F}_{inert}(t); \\ \mathbf{r}_{0,inert} \cdot \mathbf{z}_{inert} + \mathbf{r}_{0,0} \cdot \mathbf{z}_0 &= \mathbf{F}_0(t). \end{aligned} \quad (10)$$

Для решения уравнений движения (10) используем известный [10, 11] алгоритм Ньюмарка, применяя его процедуру к первому уравнению в (10).

Алгоритм динамического расчета систем с односторонними связями представляет собой описанную ниже последовательность действий.

1. Формирование по (2) матрицы жесткости \mathbf{R}_o метода конечных элементов с учетом только двусторонних связей
2. Формирование по (3) контактной МЖ \mathbf{r}_c для основной системы метода перемещений ЛЗД – системы, где все односторонние связи превращены в двусторонние.
3. Шаги по времени метода Ньюмарка $i = 1, \dots, N$

3.1. Определение нагрузки \mathbf{P} , как суммы заданного силового воздействия, сил инерции и сил демпфирования:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}(i \cdot \Delta t) - \mathbf{M} \cdot \mathbf{z}^{<i-1>} - \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{z}}^{<i-1>}$$

3.2. Формирование по (4) контактного ГВ \mathbf{r}_{fc} при $\mathbf{R}_{fc} = \mathbf{P}$

3.3. Решение ЛЗД (5) и определение рабочей схемы сооружения.

3.4. Получение МЖ МКЭ \mathbf{R} преобразованием \mathbf{R}_o с учетом полученной рабочей схемы (с учетом включенных односторонних связей).

3.5. Определение эффективной матрицы жесткости \mathbf{R}_{eff} :

$$\mathbf{r}_{eff} = \mathbf{r}_{inert} + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot \mathbf{m} + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \mathbf{d}$$

3.6. Определение эффективного грузового вектора \mathbf{F}_{eff} метода

Ньюмарка:

$$\mathbf{F}_{eff} = \mathbf{F}_{inert}(i \cdot \Delta t) + \mathbf{m} \cdot \left[\frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \mathbf{z}^{<i-1>} + \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \dot{\mathbf{z}}^{<i-1>} + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \cdot \ddot{\mathbf{z}}^{<i-1>} \right] + \\ + \mathbf{d} \cdot \left[\frac{\delta}{\alpha \cdot \Delta t} \cdot \dot{\mathbf{z}}^{<i-1>} + \left(\frac{\delta}{\alpha} - 1 \right) \cdot \ddot{\mathbf{z}}^{<i-1>} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right) \cdot \dddot{\mathbf{z}}^{<i-1>} \right]$$

3.7. Решение системы уравнений (аналога (10)):

$$\mathbf{r}_{eff} \cdot \mathbf{z}_{inert}^{<i>} + \mathbf{r}_{inert,0} \cdot \mathbf{z}_0^{<i>} = \mathbf{F}_{eff}; \\ \mathbf{r}_{0,inert} \cdot \mathbf{z}_{inert}^{<i>} + \mathbf{r}_{0,0} \cdot \mathbf{z}_0^{<i>} = \mathbf{F}_0(i \cdot \Delta t).$$

относительно вектора перемещений $\mathbf{z}^{<i>}$

3.8. Определение вектора ускорений:

$$\mathbf{z}^{<i>} = \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t^2} \cdot (\mathbf{z}^{<i>} - \mathbf{z}^{<i-1>}) - \frac{1}{\alpha \cdot \Delta t} \dot{\mathbf{z}}^{<i-1>} - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \cdot \ddot{\mathbf{z}}^{<i-1>}$$

3.9. Определение вектора скоростей:

$$\dot{\mathbf{z}}^{<i>} = \dot{\mathbf{z}}^{<i-1>} + \Delta t \cdot (1 - \delta) \cdot \ddot{\mathbf{z}}^{<i-1>} + \Delta t \cdot \delta \cdot \ddot{\mathbf{z}}^{<i>}$$

3.10. $i := i + 1$. Переход к п. 3.1.

Здесь: верхний индекс в угловых скобках – номер шага; α , δ – коэффициенты метода Ньюмарка.

Примеры.

Пример 1. Рассматривается балка, опертая как на двусторонние опоры, так и на односторонние жесткие опоры, работающие только на сжатие (рис. 2, а). Демпфирование отсутствует. На рис. 2, б показаны контактные и инерционные степени свободы конечно-элементной расчетной схемы балки. Время наблюдения составило 2.094 с. Число шагов интегрирования $N = 6400$. Показаны перемещения по направлению односторонних связей (рис. 2, в) и по направлению динамических степеней свободы (рис. 2, г), отмечены моменты времени, характеризующиеся разными наборами включенных в

работу односторонних связей. На рис. 2, *д* показана изогнутая ось балки в эти моменты времени.

Проведено исследование численной сходимости решения при уменьшении шага интегрирования, результаты которого представлены на рис. 3. Малое число шагов интегрирования приводит к «разбалтыванию решения» (рис. 3, *а*). Погрешность решения нарастает с увеличением событий «включение/выключение» односторонних связей (рис. 3, *б*, *в*).

Пример 2. Балка, показанная на рис. 4, *а*, отличается от балки примера 1 распределением масс и импульсной нагрузкой, смоделированной начальной скоростью в 4 м/с. Время наблюдения – 1.047 с. Число шагов интегрирования $N = 6400$.

Исследование сходимости решения привело к результатам, аналогичным результатам примера 1.

На рис. 4, *б* показаны графики перемещений по направлению односторонних связей, подтверждающие, как и в примере 1, выполнение условий неотрицательности $z_c \geq 0$.

На рис. 4, *в* показаны графики вертикальных перемещений масс (перемещений по направлению динамических степеней свободы) не имеющих таковых ограничений.

На рис. 4, *г* показана изогнутая ось балки в характерные моменты времени.

На рис. 5 представлены результаты исследования сходимости решения при сгущении временной сетки для рассматриваемой балки при загрузке ее силой $F=40$ кН, внезапно приложенной по направлению z_{14} (см. рис. 2, *б*).

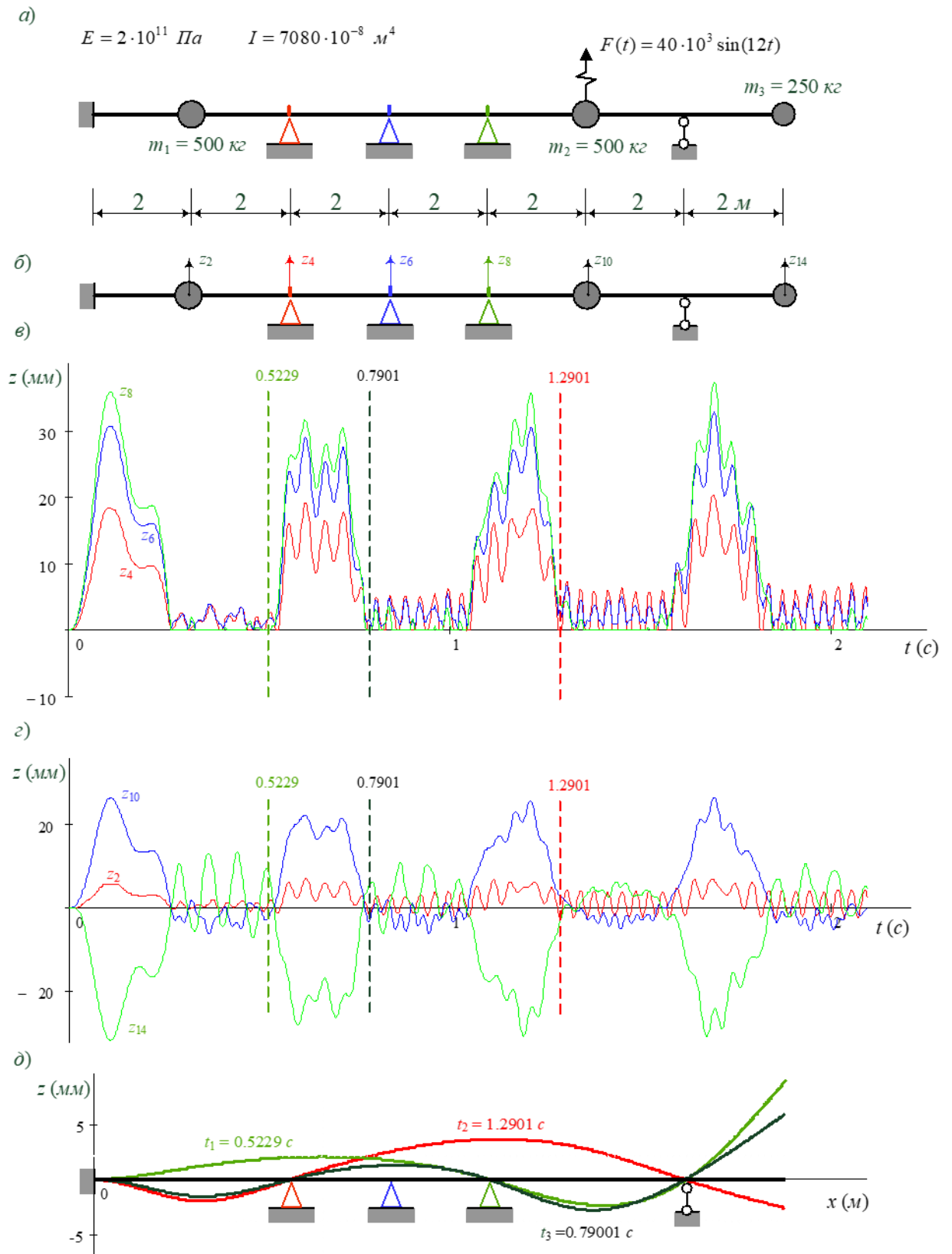


Рис. 2. Результаты расчета: а – расчетная схема; б – динамические (z_2, z_{10}, z_{14}) и контактные (z_4, z_6, z_8) степени свободы; в – перемещения (z_4, z_6, z_8) опорных сечений односторонних опор; г – перемещения z_2, z_{10}, z_{14} по направлению динамических степеней свободы; д – изогнутая ось балки в моменты времени, характеризующиеся разными рабочими схемами

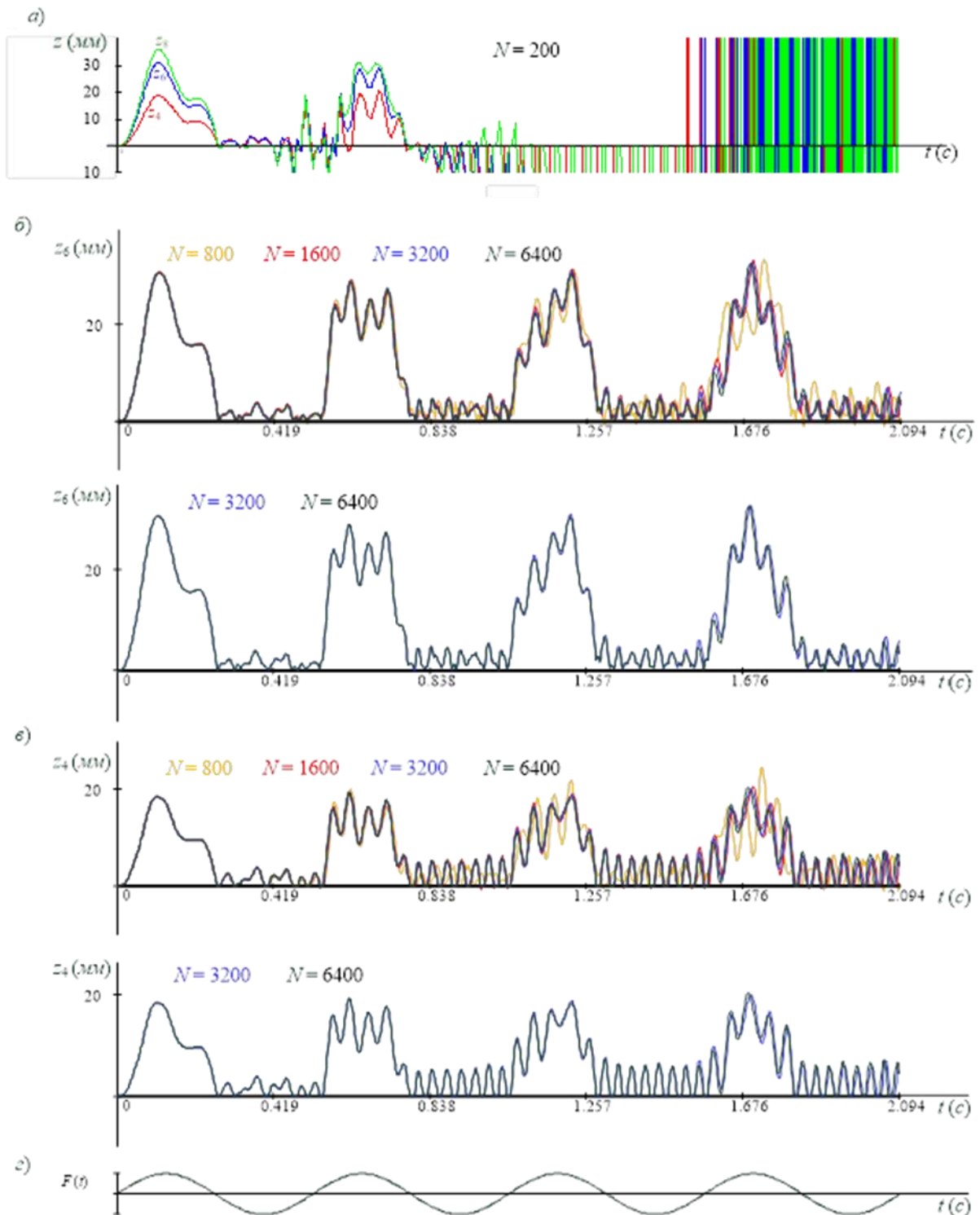


Рис. 3. Сходимость решения при уменьшении шага интегрирования: а - «разбалтывание» решения на примере z_4 , z_6 , z_8 при малом ($N=200$) числе шагов интегрирования; сравнение результатов решений при разном числе N шагов интегрирования б - на примере z_6 ; в - на примере z_4 ; г - изменение силовой нагрузки

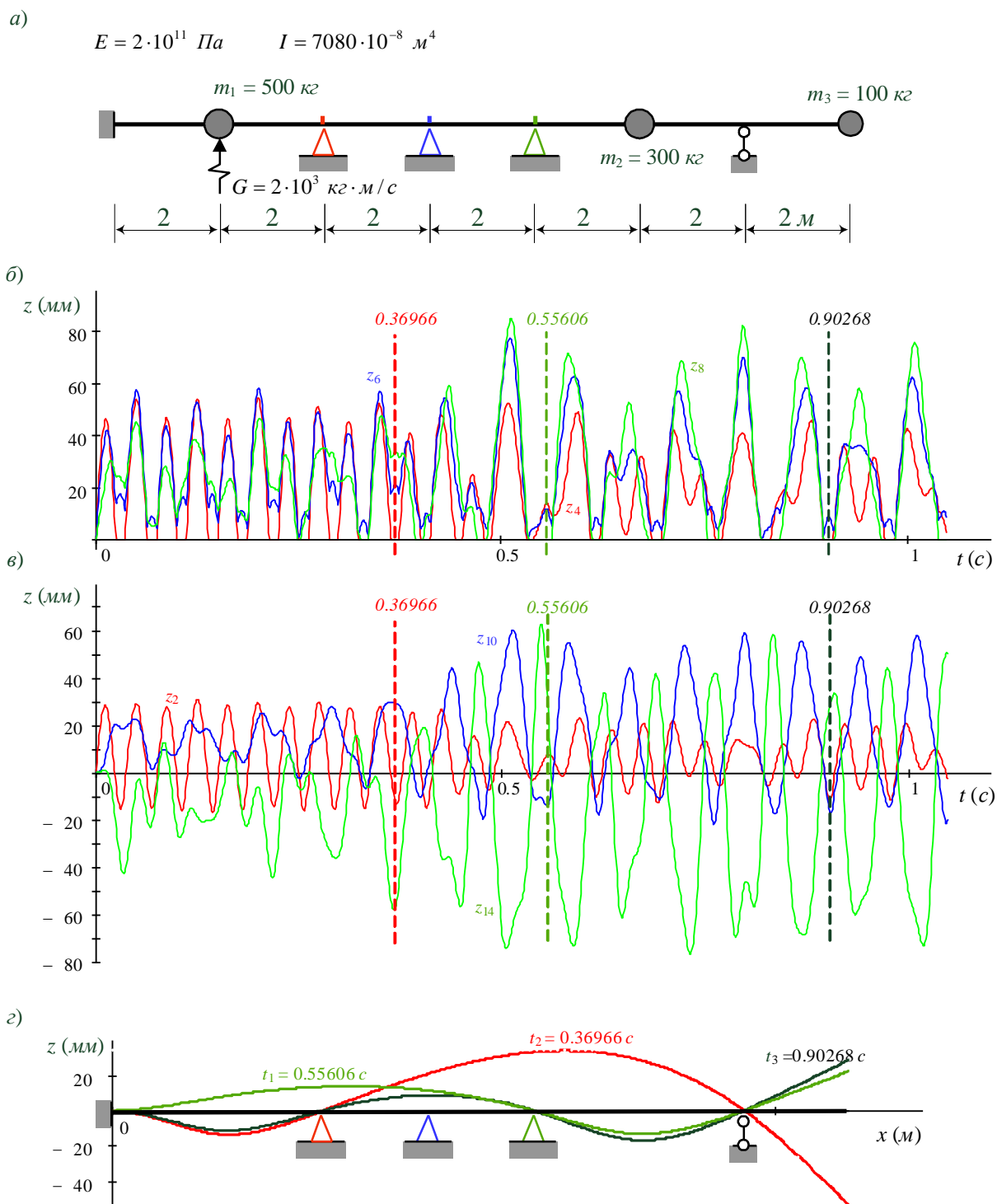


Рис. 4. Результаты расчета: а – расчетная схема; б – перемещения (z_4, z_6, z_8) опорных сечений односторонних опор; в – перемещения z_2, z_{10}, z_{14} по направлению динамических степеней свободы; г – изогнутая ось балки в моменты времени, характеризующиеся разными рабочими схемами

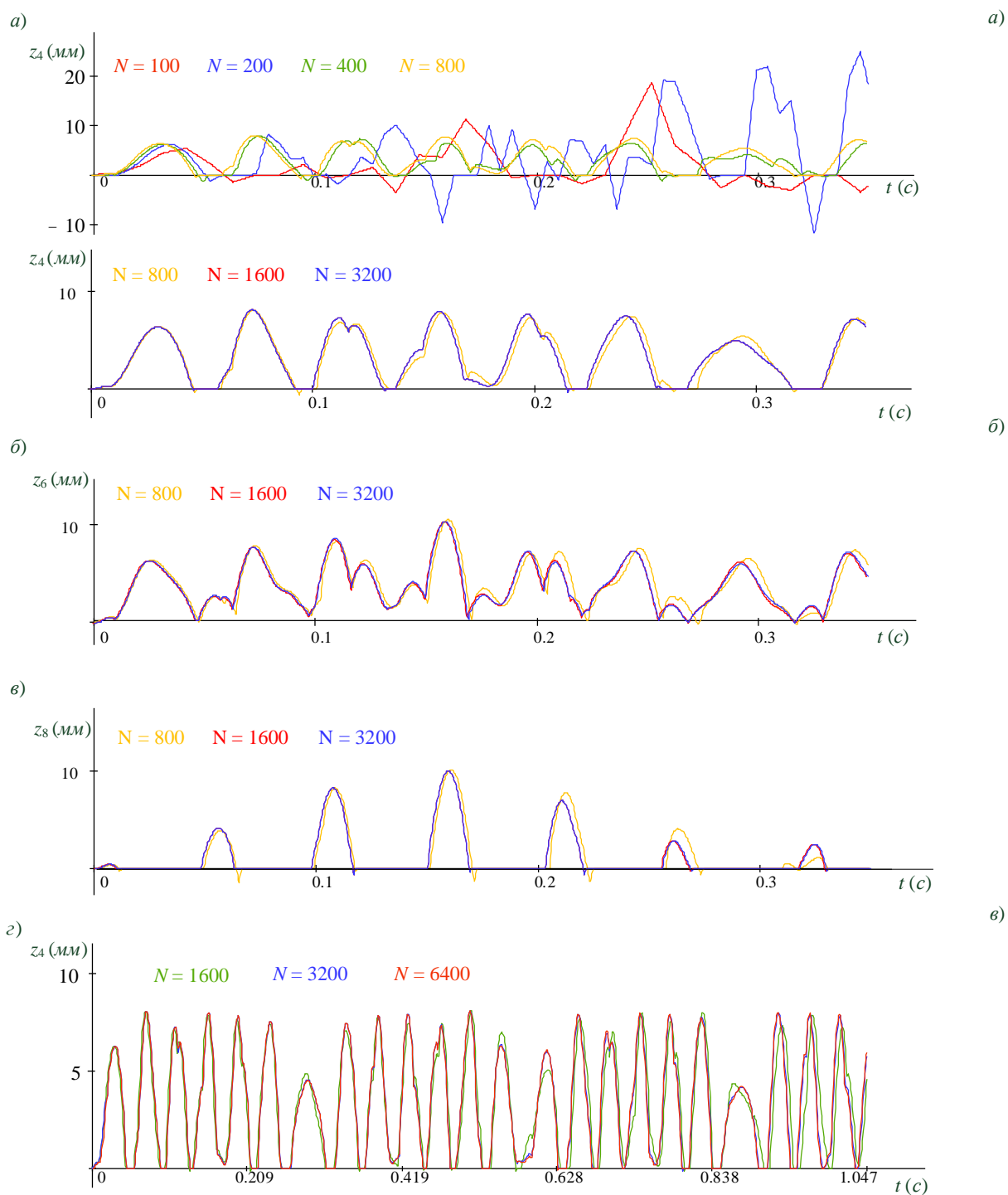


Рис. 5. Сравнение результатов решений при разном числе N шагов интегрирования а – на примере z_4 ; б - на примере z_6 ; в - на примере z_8 ; г - на примере z_4 при увеличенном втрое интервале наблюдения

Заключение

В рассмотренных примерах в начале движения жесткость балки наименьшая (все односторонние связи выключены из работы). После

включения в работу хотя бы одной из них, жесткость балки увеличивается, что приводит, естественно, к увеличению частоты колебаний.

Рассмотрены именно недемпфированные системы потому, что таковые представляют наибольшие трудности для алгоритмов динамического расчета.

Точность полученных результатов существенно зависит от точности определения момента смены рабочих схем, поскольку параметры динамической системы, полученные в конце текущего временного шага, являются начальными условиями для последующего шага. В представляемом алгоритме точность определения момента смены рабочих схем определяется шагом интегрирования – смена рабочих схем происходит в какой-то момент времени, определяемом шагом интегрирования Δt .

Развитие представленного в работе алгоритма видится, поэтому, в разработке процедуры, уточняющей момент (во времени) включения/выключения односторонних связей.

Литература

1. Смирнов И.И., Захарова К.В., Авилкин В.И., Стрельников Г.П. К использованию торсионных энергопоглотителей для сейсмозащиты сооружений // Инженерный вестник Дона, 2012, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1314/

2. Чипко С.А., Бурцева О.А. Система компенсации колебаний высотного сооружения в сейсмоактивной зоне // Инженерный вестник Дона, 2014, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2014/2249/

3. Theodosiou C., Natsiavas S. Dynamics of finite element structural models with multiple unilateral constraints. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2009, 44 (4), p.371.

4. Blumentals Alejandro, Brogliato Bernard, Bertails-Descoubes Florence. The contact problem in Lagrangian systems subject to bilateral and unilateral constraints, with or without sliding Coulomb's friction: A tutorial. 2014. 34 p.

5. Moreau J. J., Frémond M., Maceri F. An introduction to Unilateral Dynamics. Novel Approaches in Civil Engineering, Springer, 2004, pp.1-46.
6. Moreau J, J. Some Basics of Unilateral Dynamics. IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts, Aug 1998, Munich, Germany. URL: hal.science/hal-01793543.
7. Pfeiffer F. Unilateral problems of dynamics. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69 (8), pp.503 - 527.
8. Люминарский И.Е. Расчет колебаний упругих систем с инерционными упругими связями // Известия вузов. Машиностроение. 2006. №6. С. 8-14.
9. Ловцов А.Д. Линейная задача дополненности в строительной механике систем с односторонними связями: монография. - Хабаровск: Изд-во ТОГУ, 2013. - 198 с.
10. Bathe K.J. Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., Upper Sadle River, New Jersey, 1996. 1035 p.
11. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures (Third Edition). Computers & Structures, Inc. 1995. University Ave., Berkeley, CA 94704, USA. 752 p.

References

1. Smirnov I.I., Zaharova K.V., Avilkin V.I., Strel'nikov G.P. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №4. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1314/
2. Chipko S.A., Burceva O.A. Inzhenernyj vestnik Dona, 2014, №1. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n1y2014/2249/
3. Theodosiou C., Natsiavas S. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2009, 44 (4), p.371.
4. Blumentals Alejandro, Brogliato Bernard, Bertails-Descoubes Florence. The contact problem in Lagrangian systems subject to bilateral and unilateral constraints, with or without sliding. Coulomb's friction: A tutorial. 2014. 34 p.



5. Moreau J. J., Frémond M., Maceri F. An introduction to Unilateral Dynamics. Novel Approaches in Civil Engineering, Springer, 2004, pp.1-46.
6. Moreau J. J. Some Basics of Unilateral Dynamics. IUTAM Symposium on Unilateral Multibody Contacts, Aug 1998, Munich, Germany. URL: hal.science/hal-01793543.
7. Pfeiffer F. Unilateral problems of dynamics. Archive of Applied Mechanics, 1999, 69 (8), pp.503 - 527.
8. Ljuminarskij I.E. Raschet kolebanij uprugih sistem s inercionnymi uprugimi svjazjami // Izvestija vuzov. Mashinostroenie. 2006. №6. pp. 8-14.
9. Lovtsov A.D. Linejnaja zadacha dopolnitel'nosti v stroitel'noj mehanike sistem s odnostoronnimi svjazjami: monografija [Linear complementary problem in structural mechanics of unilateral constraints systems]. Khabarovsk: Izdatel'stvo TOGU, 2013. 198 p.
10. Bathe K.J. Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., Upper Sadle River, New Jersey, 1996. 1035 p.
11. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures (Third Edition). Computers & Structures, Inc. 1995. University Ave., Berkeley, CA 94704, USA. 752 p.