

Математическое моделирование магнитного поля в окрестности узкого капилляра при различных значениях гематокрита

А.В. Копыльцов

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Аннотация: Построена математическая модель магнитного поля, порождаемого отрицательными зарядами на мембранах эритроцитов, в окрестности узкого капилляра. Получены распределения величины напряженности магнитного поля как вблизи одиночного эритроцита, перекатывающегося вдоль узкого капилляра, так и в окрестности капилляра, по которому перемещаются несколько эритроцитов, при различных значениях гематокрита. Найдена зависимость максимальной величины напряженности магнитного поля в окрестности капилляра от гематокрита. В частности, показано, что на расстояниях от капилляра, равных 8 диаметрам капилляра, максимальная величина напряженности магнитного поля изменяется (в зависимости от направления) в 1,29 - 1,36 раза при увеличении гематокрита от 12,27% до 18,25%.

Ключевые слова: математическая модель, магнитное поле, заряд, мембрана, эритроцит, капилляр, гематокрит.

Введение

При исследовании кровотока в системе микроциркуляции было показано, что в узких капиллярах эритроциты перемещаются подобно гусенице трактора (tank-treading motion). Такое перекатывание эритроцитов вдоль капилляра приводит к снижению сопротивления капиллярного кровотока [1-3].

Внешняя сторона мембраны эритроцита содержит до 10% углеводов, до 45 % липидов, до 50% протеина. На мембране эритроцита расположены отрицательно заряженные элементы, которые определяются гликопротеидом, включающим сиаловую (нейтраминовую) кислоту, за счет которой создается до 60-65% отрицательного заряда эритроцита. На поверхности эритроцитов распределение зарядов определяется анионными и катионными группами, а суммарный электрический заряд эритроцита определяется соотношением этих анионных и катионных групп. Суммарный заряд мембраны эритроцита достигает до 20 миллионов элементарных зарядов $e=1,60 \times 10^{-19}$ Кл. Нижняя

граница заряда эритроцита оценивается в 22 тысячи элементарных зарядов [4, 5].

Предполагается, что заряды на поверхности мембраны эритроцита распределены равномерно и при движении мембраны, согласно закону Био-Савара-Лапласа, порождают магнитное поле в окружающем пространстве [6-8]. При кровотоке в узком капилляре эритроциты следуют один за другим и между ними располагаются столбики плазмы. Длины столбиков плазмы в узком капилляре определяются гематокритом и составляют от нескольких микрометров до нескольких сотен микрометров. Величина гематокрита в капиллярах составляет 0-20% [9]. Если распределение напряженности магнитного поля вблизи одного эритроцита известно, то можно определить напряженность магнитного поля в любой точке в окрестности узкого капилляра. И наоборот, зная распределение напряженности магнитного поля вблизи капилляра, можно сделать заключение о характере кровотока в капилляре. В частности, в случае уменьшения напряженности магнитного поля в окрестности некоторого узкого капилляра можно сделать вывод, что скорость вращения мембран эритроцитов в этом капилляре снизилась, линейная скорость эритроцитов стала меньше и в случае дальнейшего снижения может произойти остановка кровотока, что может привести к недостатку кислорода и питательных веществ в окружающих тканях и в итоге к некрозу тканей. Поэтому важно исследовать распределение напряженности магнитного поля вблизи капилляра при различных значениях микрогемодинамических параметров, в частности, гематокрита.

Математическая модель и алгоритм расчета

Предполагается, что в узком капилляре движется эритроцит с постоянной площадью поверхности ($S_{RBC}=135 \text{ мкм}^2=135 \times 10^{-12} \text{ м}^2$) и постоянным объемом ($V_{RBC}=94 \text{ мкм}^3=94 \times 10^{-18} \text{ м}^3$), поскольку эти величины являются средними и интервалы изменения S_{RBC} составляют 120-150 мкм^2

($120 \times 10^{-12} - 150 \times 10^{-12} \text{ м}^2$), а V_{RBC} - $80 - 110 \text{ мкм}^3$ ($80 \times 10^{-18} - 110 \times 10^{-18} \text{ м}^3$) [10]. Эритроцит аппроксимирован усеченным цилиндром с минимальной (L_{min}) и максимальной (L_{max}) образующими. Если радиус r эритроцита известен (в узком капилляре он близок по величине радиусу капилляра), то L_{min} и L_{max} однозначно определяются через площадь поверхности S_{RBC} , объем V_{RBC} и радиус эритроцита r из следующих формул (Рис. 1):

$$V_{RBC} = \pi r^2 L_{min} + \pi r^2 (L_{max} - L_{min}) / 2,$$

$$S_{RBC} = \pi r^2 + 2\pi r L_{min} + \pi r (L_{max} - L_{min}) + \pi r (\sqrt{4r^2 + (L_{max} - L_{min})^2}) / 2,$$

$$L_{min} = V_{RBC} / (\pi r^2) - 2((S_{RBC} - \pi r^2 - 2V_{RBC} / r) / (\pi r) - 4r^2)^2,$$

$$L_{max} = V_{RBC} / (\pi r^2) + 2((S_{RBC} - \pi r^2 - 2V_{RBC} / r) / (\pi r) - 4r^2)^2.$$

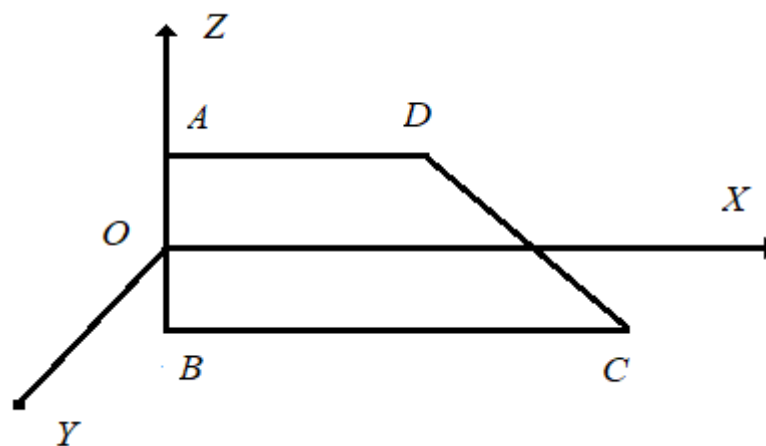


Рис.1. - Сечение модели эритроцита плоскостью XOZ в координатах OXYZ. AD – минимальная образующая (L_{min}), BC – максимальная образующая (L_{max}), AB – диаметр эритроцита ($2r$).

На мембране эритроцита расположены отрицательные заряды. Суммарная величина заряда внешней стороны мембраны эритроцита составляет до 20 миллионов элементарных зарядов, т.е. зарядов электрона $e = 1,60 \times 10^{-19}$ Кл. Поскольку заряды объединены в группы, то предполагается, что заряды дискретные и распределены равномерно по поверхности эритроцита [4, 5].

При перемещении эритроцита по узкому капилляру, заряды, расположенные на мембране эритроцита, перекатываются вместе с мембраной эритроцита. Предполагается, что траектории перемещения зарядов расположены в плоскостях параллельных плоскости XOZ (Рис. 2).

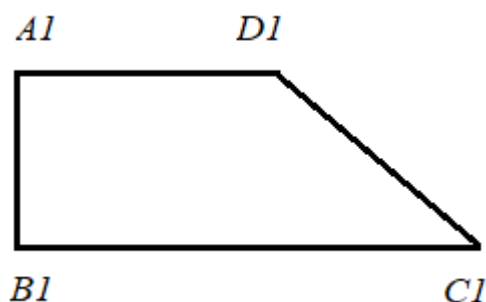


Рис. 2. - Траектория движения зарядов $AI \rightarrow BI \rightarrow CI \rightarrow DI \rightarrow AI$
в плоскости параллельной плоскости XOZ .

Для вычисления напряженности H магнитного поля в какой-либо точке пространства (x, y, z) применяется закон Био-Савара-Лапласа. На конце радиус-вектора R в точке (x, y, z) величина напряженности магнитного поля, порождаемого подвижным зарядом Q , равна

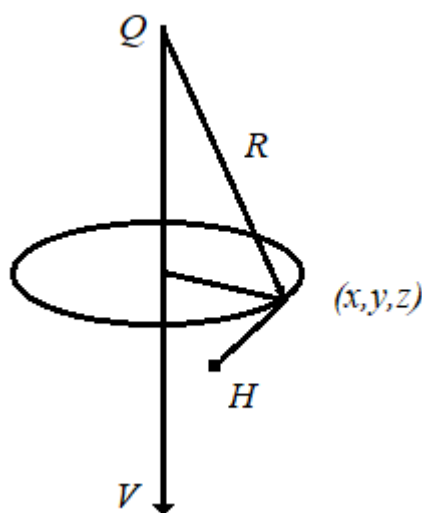


Рис. 3. - Заряд Q движется со скоростью V , H – напряженность магнитного поля на конце радиус-вектора R в точке (x, y, z) .

$$H = \frac{QV \sin(\alpha)}{4\pi R^2},$$

где V – скорость заряда, R – радиус-вектор, α - угол между вектором V и радиус-вектором R , направленном от точечного заряда Q в точку (x, y, z) [11-13] (Рис. 3).

Для определения итоговой напряженности магнитного поля в некоторой точке (x, y, z) , создаваемой несколькими зарядами, напряженности, создаваемые в точке (x, y, z) каждым из зарядов, складываются как векторы.

Результаты и их обсуждение

При расчетах на компьютере в качестве входных параметров брались следующие: $V_{RBC}=94 \text{ мкм}^3=94 \times 10^{-18} \text{ м}^3$ (объем эритроцита), $S_{RBC}=135 \text{ мкм}^2=135 \times 10^{-12} \text{ м}^2$ (площадь поверхности эритроцита), $N_{ob}=20$ оборотов мембраны эритроцита в секунду, $r=2 \text{ мкм}=2 \times 10^{-6} \text{ м}$ (радиус эритроцита), $Q_{RBC}=3,2 \times 10^{-12} \text{ Кл}$ (заряд эритроцита), $N_{tr}=101$ (число траекторий, по которым движутся заряды эритроцитов), $V_{L_{RBC}}=100 \text{ мкм/с}=100 \times 10^{-6} \text{ м/с}$ (скорость эритроцита в капилляре). После проведения расчетов на компьютере в качестве выходных параметров получили: $L_{min}=3,4 \text{ мкм}=3,4 \times 10^{-6} \text{ м}$ (минимальная образующая), $L_{max}=11,5 \text{ мкм} = 11,5 \times 10^{-6} \text{ м}$ (максимальная образующая), длины траекторий по которым перемещаются заряды, координаты и скорости зарядов расположенных на траекториях, число зарядов $N_{za}=38594$ на мембране эритроцита. Напряженность магнитного поля определялась в плоскостях параллельных капилляру (в плоскостях параллельных плоскостям $ХОУ$ и $ХОZ$) и расположенных на расстоянии от капилляра, равном 8 диаметрам капилляра, т.е. в плоскостях, определяемых следующим образом:

$$\begin{aligned} y &= -34 \text{ мкм} = -34 \times 10^{-6} \text{ м}, y = 34 \text{ мкм} = 34 \times 10^{-6} \text{ м}, \\ z &= -34 \text{ мкм} = -34 \times 10^{-6} \text{ м}, z = 34 \text{ мкм} = 34 \times 10^{-6} \text{ м}. \end{aligned}$$

На рисунках представлены распределения напряженности H магнитного поля в плоскостях $z=34 \times 10^{-6} \text{ м}$ (Рис. 4), $z=-34 \times 10^{-6} \text{ м}$ (Рис. 5),

$y=34\times 10^{-6}$ м (Рис. 6), создаваемые зарядами, расположенными на мембране одного эритроцита. Максимальное значение H в плоскости $z=34\times 10^{-6}$ м достигает величины $H_{max}=1,8841\times 10^{-5}$ а/м, в плоскости $z=-34\times 10^{-6}$ м достигает $H_{max}=1,8797\times 10^{-5}$ а/м, в плоскости $y=34\times 10^{-6}$ м достигает $H_{max}=7,8354\times 10^{-6}$ а/м. Величины напряженности магнитного поля в плоскости $y=-34\times 10^{-6}$ м симметричны напряженностям в $y=34\times 10^{-6}$ м.

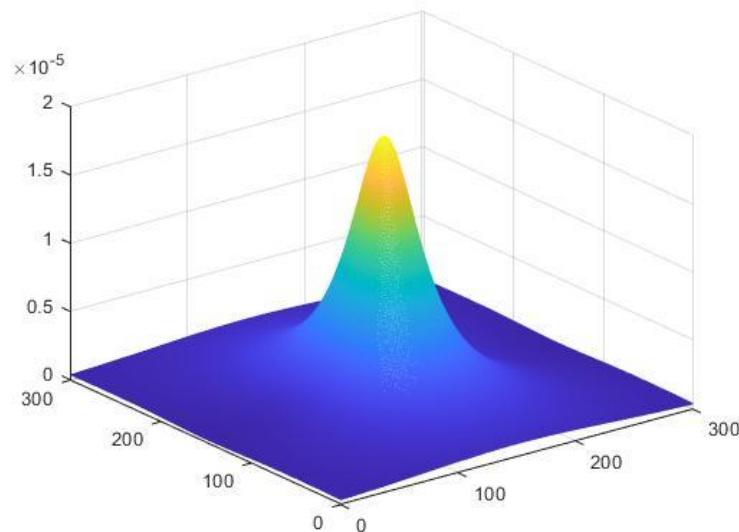


Рис. 4. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Y (ось абсцисс) в плоскости $z=34\times 10^{-6}$ м.

Сравнение распределений напряженности магнитно поля H в различных плоскостях параллельных капилляру показывает, что максимальное значение $H_{max}=1,8841\times 10^{-5}$ а/м достигается в плоскости $z=34\times 10^{-6}$ м.

В случае, когда в капилляре находится несколько эритроцитов, в суммарную величину напряженности магнитного поля в некоторой точке (x, y, z) вносят вклад несколько соседних эритроцитов.

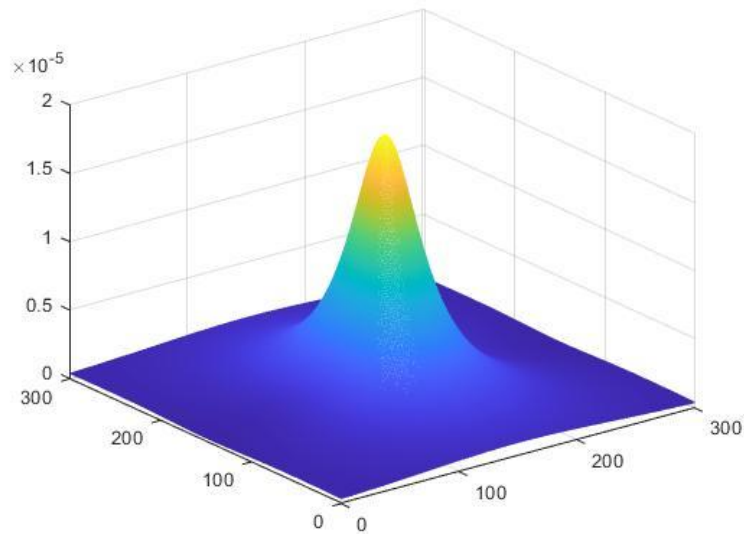


Рис. 5. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Y (ось абсцисс) в плоскости $z=-34\times 10^{-6}$ м.

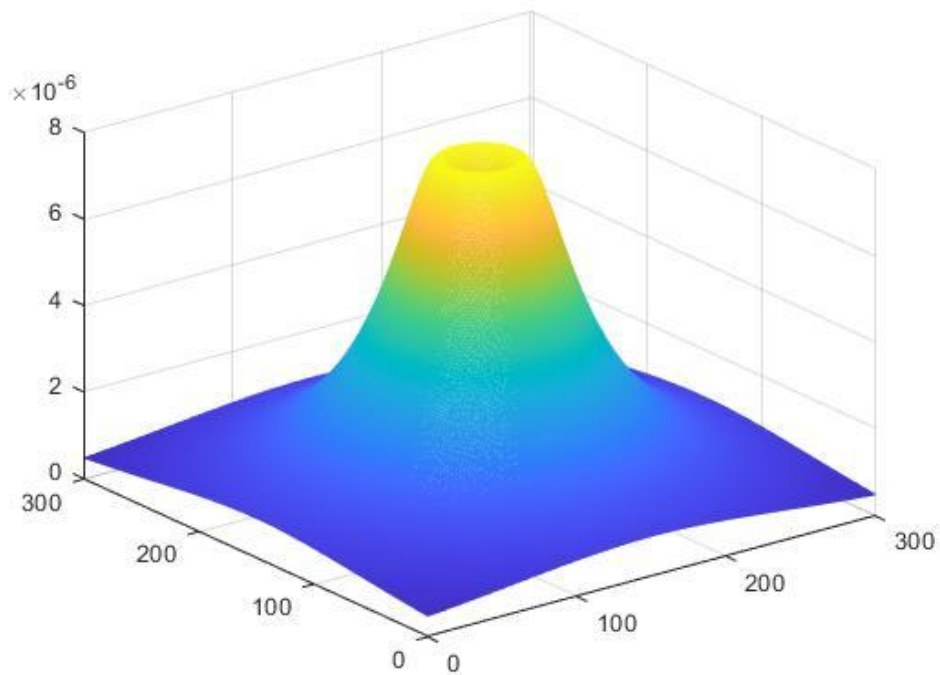


Рис. 6. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Z (ось абсцисс) в плоскости $y=34\times 10^{-6}$ м.

Расчеты напряженности магнитного поля вблизи капилляра при разных значениях гематокрита Ht , проведенные в плоскостях $y=-34\times 10^{-6}$ м,

$y=34 \times 10^{-6}$ м, $z=-34 \times 10^{-6}$ м, $z=34 \times 10^{-6}$ м, представлены на Рис. 7-10.

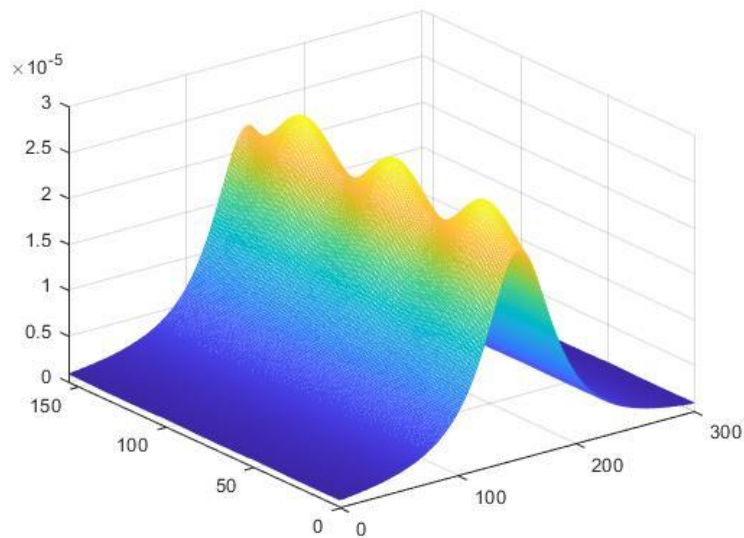


Рис. 7. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Y (ось абсцисс) в плоскости $z=-34 \times 10^{-6}$ м.

Гематокрит $Ht=14,67\%$.

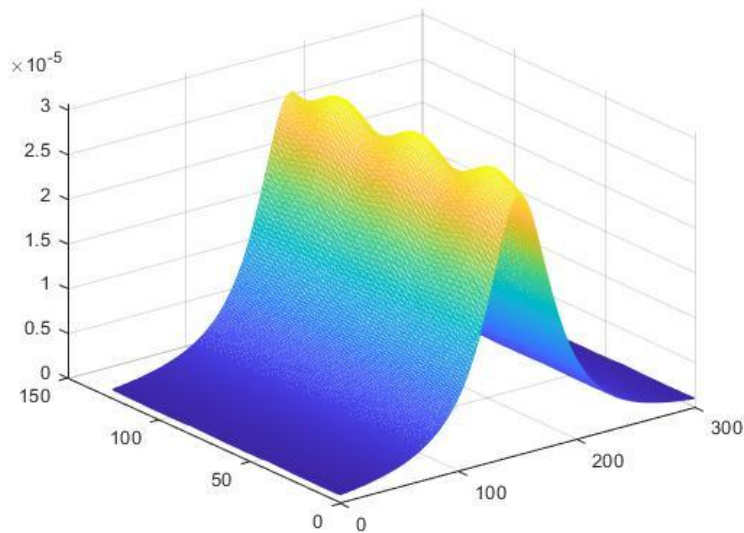


Рис. 8. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Y (ось абсцисс) в плоскости $z=-34 \times 10^{-6}$ м.

Гематокрит $Ht=18,25\%$.

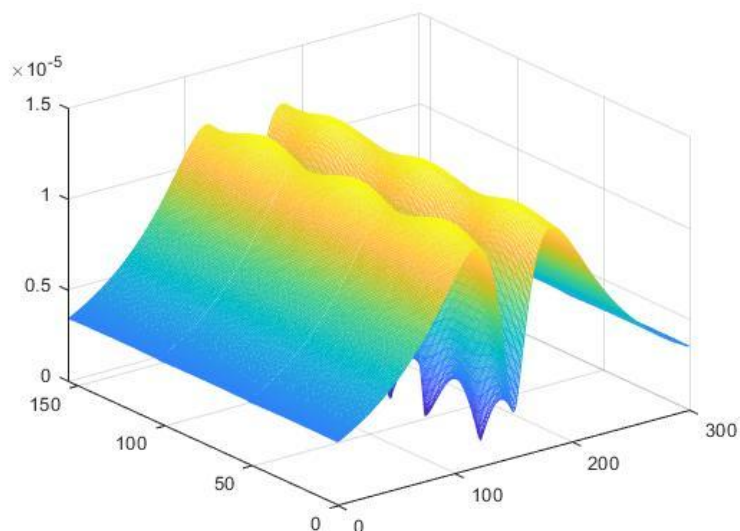


Рис. 9. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Z (ось абсцисс) в плоскости $y=34 \times 10^{-6}$ м. Гематокрит $Ht=14,67\%$.

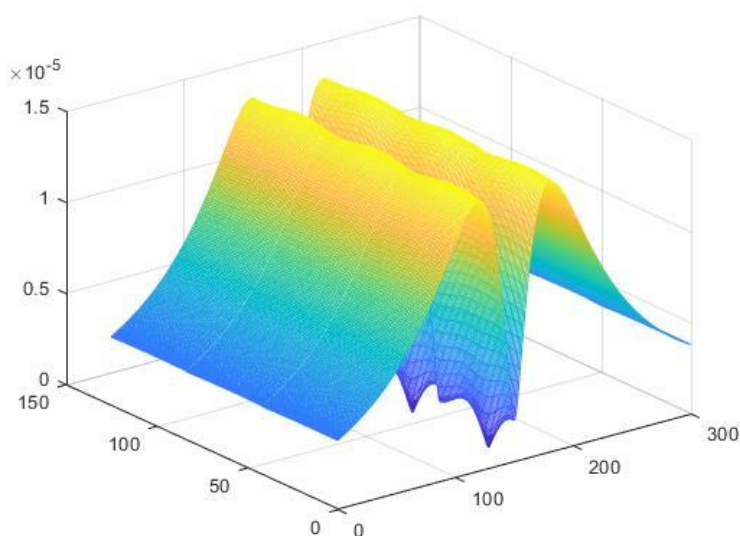


Рис. 10. - Распределение напряженности магнитного поля H (а/м) по осям X (ось ординат) и Z (ось абсцисс) в плоскости $y=34 \times 10^{-6}$ м. Гематокрит $Ht=18,25\%$

Зависимости максимальных значений напряженности магнитного поля H в окрестности капилляра от гематокрита Ht представлены на Рис. 11-13.

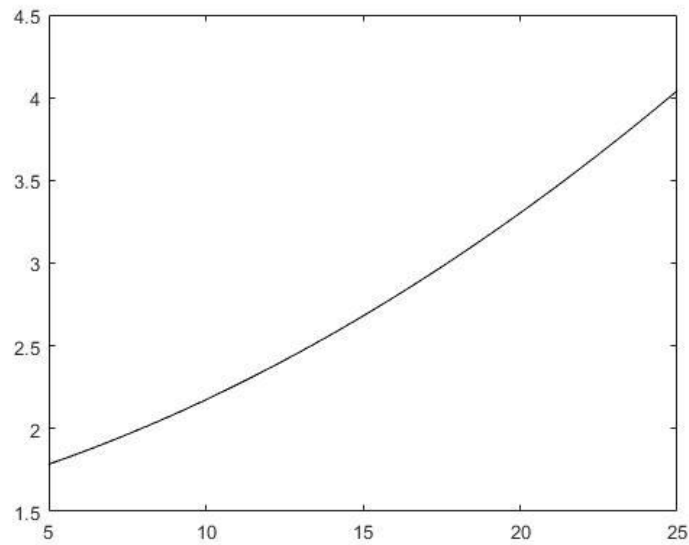


Рис. 11. - Зависимость максимального значения напряженности $H \times 10^{-5}$ (а/м) магнитного поля (ось ординат) от гематокрита Ht (%) (ось абсцисс) в плоскости $z=34 \times 10^{-6}$ м.

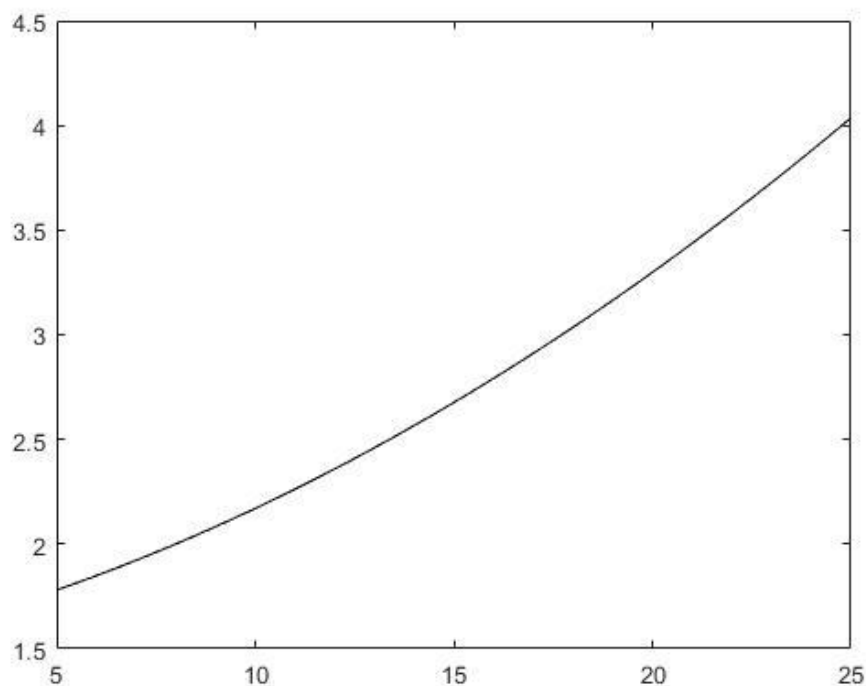


Рис. 12. - Зависимость максимального значения напряженности $H \times 10^{-5}$ (а/м) магнитного поля (ось ординат) от гематокрита Ht (%) (ось абсцисс) в плоскости $z=-34 \times 10^{-6}$ м.

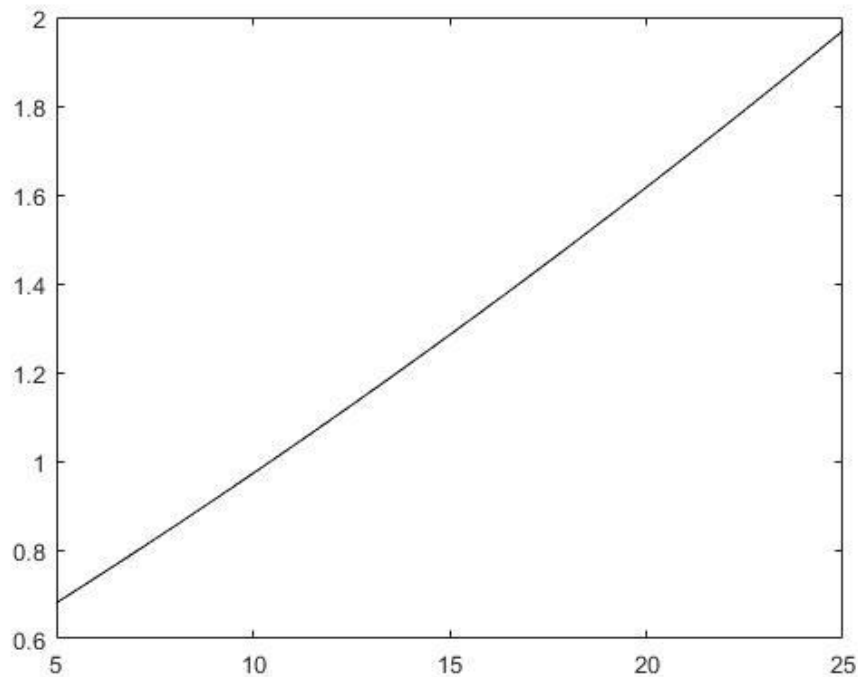


Рис. 13. - Зависимость максимального значения напряженности $H \times 10^{-5}$ (а/м) магнитного поля (ось ординат) от гематокрита Ht (%) (ось абсцисс) в плоскости $y=34 \times 10^{-6}$ м.

Из представленных рисунков видно, что при увеличении гематокрита напряженность магнитного поля в окрестности капилляра увеличивается. Так, при увеличении гематокрита от 12,27% до 18,25% происходит возрастание максимального значения напряженности магнитного поля от $2,3900 \times 10^{-5}$ а/м до $3,0720 \times 10^{-5}$ а/м (в плоскости $z=34 \times 10^{-6}$ м), от $2,3859 \times 10^{-5}$ а/м до $3,0675 \times 10^{-5}$ а/м (в плоскости $z=-34 \times 10^{-6}$ м), от $1,1113 \times 10^{-5}$ а/м до $1,4980 \times 10^{-5}$ а/м (в плоскости $y=34 \times 10^{-6}$ м). Поскольку модель эритроцита симметрична относительно плоскости XOZ , то в плоскости $y=-34 \times 10^{-6}$ м напряженность магнитного поля изменяется аналогично изменению напряженности в плоскости $y=34 \times 10^{-6}$ м. Это объясняется тем, что в итоговую напряженность магнитного поля в окрестности капилляра вклад вносят несколько соседних эритроцитов. Расчеты показывают, что при низких значениях гематокрита (менее 5%) вклад соседних эритроцитов

составляет менее 1% и, поэтому, максимальная напряженность магнитного поля вблизи капилляра, создаваемая последовательностью эритроцитов, близка по величине максимальной напряженности магнитного поля, создаваемой одиночным эритроцитом. При более высоких значениях гематокрита расстояния между эритроцитами уменьшаются, и вклад соседних эритроцитов в итоговую напряженность вблизи капилляра существенно возрастает и, поэтому, для описания более точной картины распределения напряженности магнитного поля его необходимо учитывать.

Заключение

Расчеты, проведенные на компьютере, показали, что распределение напряженности магнитного поля вблизи узкого капилляра зависит от объема и площади поверхности эритроцита в капилляре, радиуса эритроцита, определяемого радиусом капилляра, скорости вращения мембраны эритроцита, заряда эритроцита и гематокрита. Модельные расчеты на компьютере позволили найти распределение напряженности магнитного поля, как в окрестности эритроцита, так и капилляра, в плоскостях $y=-y_0$, $y=y_0$, $z=-z_0$, $z=z_0$, где y_0 , z_0 – некоторые постоянные, равные, например, при расчетах 34×10^{-6} м.

Показано, что при увеличении гематокрита от 12,27% до 18,25%, при прочих равных условиях, напряженность магнитного поля вблизи капилляра возрастает в 1,29-1,36 раз. Таким образом, напряженность магнитного поля в окрестности капилляра может выступать как индикатор уровня наполнения эритроцитами микрососудов, гематокрита.

Проводимые исследования могут стать основой для разработки приборов, измеряющих напряженность магнитного поля в системе микроциркуляции, с помощью которых можно будет судить о проблемах кровотока в системе микроциркуляции и найти пути их решения.

Благодарность за финансовую поддержку работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003, "Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга".

Литература

1. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Methods of blood flow modeling // Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V.11.№1. pp.1-25.
2. Lighthill M. Pressure-forcing of tightly fitting pellets along fluid-filled elastic tubes // J. Fluid Mech. 1968. V.34. pp.113-143.
3. Kopyltsov A.V. Mathematical model of the motion of asymmetric erythrocytes along narrow capillaries // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2012. V.26. №6. pp.535-553.
4. Чижевский А.Л. Структурный анализ движущейся крови. М.: АН СССР. 1959. 474 с.
5. Голубков В.В. Оценка различий в электрических свойствах мембран эритроцитов разных групп крови системы АВО // Журнал научных публикаций для аспирантов и докторантов. 2011. №9. URL: jurnal.org/articles/2011/med8.html
6. Копыльцов А.В. Двухмерная модель распределения магнитного поля между эритроцитами в узком капилляре // Инженерный вестник Дона. 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4466
7. Копыльцов А.В. Математическое моделирование распределения магнитного поля в окрестности эритроцита // Инженерный вестник Дона. 2018. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4835

8. Копыльцов А.В. Математическая модель электромагнитного взаимодействия эритроцитов в узком капилляре // Инженерный вестник Дона. 2018. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/5208

9. Ткаченко Б.И. Физиология кровообращения: физиология сосудистой системы. Л: Наука. 1984. 652 с.

10. Fung Y.C., Tong P. Theory of sphering of red blood cells // Biophys. J. 1968. V.2. №2. pp.175-198.

11. Orear J. Physics. New York: Macmillan Publ. 1981. 624 p.

12. Cherpakov A.V., Soloviev A.N., Gricenko V.V., Mohanty S.C., Parshin D.Y., Butenko U.I., Bocharova O.V. Comparison of finite element modeling and analytical approach results for oscillating rod structure with crack // Инженерный вестник Дона. 2014. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2785

13. Голубев А.А., Игнатъев В.К. Измерение тензорных величин магнитного поля в микроструктурном анализе ферромагнитных материалов // Инженерный вестник Дона. 2011. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/473

References

1. Bessonov N., Sequeira A., Simakov S., Vassilevskii Yu., Volpert V. Math. Model. Nat. Phenom. 2016. V.11.№1. pp.1-25.

2. Lighthill M. J. Fluid Mech. 1968. V.34. pp.113-143.

3. Kopyltsov A.V. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modeling. 2012. V.26. №6. pp.535-553.

4. Chizhevskiy A.L. Strukturnyy analiz dvizhushcheysya krovi [Structural analysis of moving blood]. M.: Academy of Sciences of the USSR. 1959. 474 p.

5. Golubkov V.V. Zhurnal nauchnykh publikatsiy dlya aspirantov i doktorantov. 2011. №9. URL: jurnal.org/articles/2011/med8.html



6. Kopyltsov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2017. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4466.
7. Kopyltsov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2018/4835
8. Kopyltsov A.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/5208
9. Tkachenko B.I. Fiziologiya krovoobrashcheniya: fiziologiya sosudistoy sistemy [Physiology of circulation: physiology of the vascular system]. L: Science. 1984. 652 p.
10. Fung Y.C., Tong P. Biophys. J. 1968. V.2. №2. pp.175-198.
11. Orear J. Physics. New York: Macmillan Publ. 1981. 624 p.
12. Cherpakov A.V., Soloviev A.N., Gricenko V.V., Mohanty S.C., Parshin D.Y., Butenko U.I., Bocharova O.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2014. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2014/2785
13. Golubev A.A., Ignatiev V.K. Inzhenernyj vestnik Dona. 2011. №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2011/473