

Расчет особой шарнирно-опертой плиты по теории плит умеренной толщины

А.П. Суворов

Московский государственный строительный университет, Москва

Аннотация: В этой статье приведены результаты расчета особой шарнирно-опертой плиты по теории плит умеренной толщины. Особенность плиты заключается в задании особых граничных условий на ее краях, которые отличны от обычно принимаемых. На плиту действует равномерно-распределенная нагрузка. В статье представлены результаты расчета методом конечных элементов.

Ключевые слова: шарнирно-опертая плита, пластина, теория толстых плит, теория плит умеренной толщины, теория пластин Миндлина, теория пластин Кирхгофа, изгибающий момент, крутящий момент, поперечная сила, метод конечных элементов

Введение

Целью данной статьи является расчет плиты или пластины умеренной толщины, которая является шарнирно-опертой и находится под действием равномерно-распределенной нагрузки. Теория толстых плит, в простейшей форме, представлена, например, в работах Ванг и др. [1], Феррейра [2], Хеннане [3]. Относительно недавно теория толстых плит получила свое развитие, например, в работах Ма и др. [4], Ражапаксе и Селвадураи [5], Солдатос [6].

Напомним, что в теории толстых плит (или в теории Миндлина [7]) поперечная нормаль может вращаться так, что после поворота она не остается перпендикулярной срединной поверхности плиты и, таким образом, деформации сдвига не равны нулю. В отличие от этого, в теории тонких плит (или в теории Кирхгофа) вертикальный элемент плиты остается перпендикулярным срединной поверхности плиты после ее изгиба и деформации сдвига равны нулю.

В общем случае, аналитические результаты для толстых плит труднее получить, чем для тонких плит. Аналитические решения для толстых шарнирно-опертых слоистых плит были получены, например, в статьях [8–

10]. Однако конечно-элементное решение для толстых плит оказывается проще, чем для тонких плит. В этой работе для получения численных результатов мы возьмем за основу конечно-элементную программу, представленную в книге Феррейра [2] и написанную на языке Matlab.

Мы можем ожидать, что для пластины, которая является податливой на сдвиг, существует более широкий набор граничных условий, которые могут быть заданы на краях пластины. Например, Кабир [8,9] отмечает, что для толстой шарнирно-опертой слоистой плиты могут существовать 4 типа граничных условий SS-1, SS-2, SS-3 и SS-4. Эти типы граничных условий различаются главным образом в том, как задаются перемещения в плоскости плиты u и v . Целью данной статьи является рассмотрение случая, когда на краях пластины по-разному задаются значения углов поворота ϕ_x , ϕ_y в плоскости краев пластины, и в частности, будет рассмотрен случай, когда нулевые значения этих углов поворота на краях пластины не задаются.

Описание задачи и ее решение

Рассмотрим шарнирно-опертую плиту, находящуюся под действием равномерно-распределенной нагрузки q . Пластина является квадратной в плоскости $x-y$ и длина стороны квадрата равна a . Толщина плиты обозначена как h (рис. 1).

Будем использовать следующие обозначения. Обозначим перемещения срединной плоскости пластины вдоль осей x , y и z через u , v и w . Таким образом, w является поперечным перемещением. Оно является независимым от координаты z . Также обозначим углы поворота нормали к плоскости пластины вокруг осей y и x как ϕ_x и ϕ_y . Мы также обозначим изгибающий момент вокруг осей y и x как M_x и M_y соответственно, а крутящий момент через M_{xy} . Кроме этого, поперечная сила, действующая в сечении $x = const$,

будет обозначена как Q_x , а поперечная сила, действующая в сечении $y = const$, будет обозначена как Q_y . Важно отметить, что те обозначения, которые мы используем в данной статье, могут не совпадать с теми обозначениями, которые используются в коммерческих конечно-элементных программах (например, ϕ_x как вращение вокруг оси x , а не y), однако именно эта система обозначений обычно используется в теории пластин.

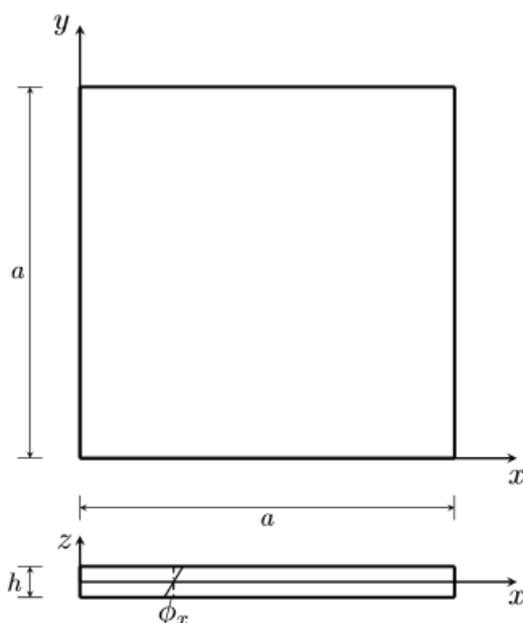


Рис. 1. – Геометрия квадратной пластины или плиты

Как и принято, мы назовем шарнирно-опертой плитой такую плиту, в которой равно нулю поперечное перемещение w и равны нулю соответствующие изгибающие моменты на краях плиты, т.е.

$$\begin{aligned} w &= 0, & x &= 0, a, & y &= 0, a \\ M_x &= 0, & x &= 0, a \\ M_y &= 0, & y &= 0, a \end{aligned} \tag{1}$$

Далее мы рассмотрим два типа граничных условий. В первом типе граничных условий, который мы обозначим как SS-A, мы задаем нулевые значения соответствующих углов поворота на краях пластины:

$$\begin{aligned} \phi_y &= 0, & x &= 0, a, \\ \phi_x &= 0, & y &= 0, a. \end{aligned} \tag{2}$$

Во втором типе граничных условий, который мы обозначим как SS-B, мы задаем нулевые значения крутящего момента на краях пластины

$$M_{xy} = 0, \quad x = 0, a, \quad y = 0, a \quad (3)$$

Обратим внимание на то, что в случае плиты с граничными условиями типа SS-B нулевые значения углов поворота не задаются. Граничные условия (2) являются общепринятыми, в то время результаты расчета плит с граничными условиями SS-B отсутствуют. Данная статья и будет рассматривать граничные условия типа SS-B. Отметим, что в терминологии Ванг [1] плиты с граничными условиями SS-A и SS-B обозначаются как SS и SS* соответственно.

Отметим также, что ввиду симметрии плиты и отсутствия нагрузок в плоскости плиты перемещения срединной поверхности u и v плиты равны нулю. Таким образом, w – единственная ненулевая компонента вектора перемещений.

Решение данной задачи будет основано на теории плит умеренной толщины или теории Миндлина. Задача будет решаться методом конечных элементов. Для этого квадратная пластина разбивается на сетку, в которой количество элементов вдоль осей x и y равно (например, сетка 40 на 40 элементов). В этой сетке будут использоваться 4-х узловые прямоугольные элементы. Как уже отмечалось, при расчете за основу взята программа, написанная на языке Matlab и представленная в книге Феррейра [2]. В программу были внесены изменения для того, чтобы она была эффективной и для мелкой сетки, т.е. для сетки с большим количеством элементов. Суть этих изменений заключается в использовании решателя для разреженных матриц и будет описана в следующей статье автора.

В этой статье мы в основном изучаем распределение изгибающих моментов внутри плиты с граничными условиями типа SS-B. Это связано с тем, что основные различия в решениях между плитами умеренной толщины

с SS-A и SS-B граничными условиями наблюдаются в распределениях изгибающих моментов и поперечных сил, а поперечные перемещения при этом очень похожи. Также, решение для плит с граничными условиями типа SS-A хорошо изучено и для симметричных, однородных плит умеренной толщины это решение мало отличается от решения, полученного по теории тонких плит.

Напомним процедуру вычисления изгибающих моментов в методе конечных элементов, основываясь на теории толстых плит. Пусть \mathbf{d}^e вектор узловых перемещений элемента

$$\mathbf{d}^e = [w_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \dots, w_4, \phi_{x4}, \phi_{y4}] \quad (4)$$

Этот вектор имеет 12 компонент для 4-х узлового конечного элемента. Вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_f = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$ может быть рассчитан, используя матрицу \mathbf{B}_f , т.е.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = z\mathbf{B}_f\mathbf{d}^e \quad (5)$$

где матрица \mathbf{B}_f вычисляется, используя обычные функции формы элемента $N_1(x), \dots, N_4(x)$,

$$\mathbf{B}_f = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Эта матрица может быть рассчитана для любой точки элемента с естественными координатами ξ, η : $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$. Для того чтобы получить деформации вдоль стороны квадратной плиты $y=0$, достаточно вычислить матрицу \mathbf{B}_f для всех конечных элементов, примыкающих к этой стороне, в двух углах каждого конечного элемента с естественными координатами $\xi = -1, \eta = -1$ и $\xi = 1, \eta = -1$, а затем использовать линейную

интерполяцию. Именно этот способ мы будем использовать для вычисления изгибающих моментов вдоль стороны квадратной плиты $y = 0$ (см. ниже).

Умножая далее деформацию на матрицу

$$\mathbf{D}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

мы получим напряжения

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f. \quad (8)$$

Далее вектор моментов может быть получен как

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \boldsymbol{\sigma}_f. \quad (9)$$

Численные результаты

В качестве примера рассмотрим квадратную шарнирно-опертую плиту с длиной стороны $a=1$. Величина нагрузки, действующая на плиту, равна $q=1$. Модуль упругости принимается равным $E=10920$, а коэффициент Пуассона $\nu=0.3$. Толщина плиты $h=0.1$, и таким образом, плита является плитой умеренной толщины, так как $h/a=1/10$. Эти данные были использованы в книге Феррейра [2].

Далее мы показываем распределение изгибающих моментов в плите с граничными условиями типа SS-B вдоль центральной линии $y=1/2$ и вдоль краев $y=0$ или $y=1$. Координата x таким образом меняется от 0 до 1. Результаты были получены для довольно мелкой сетки: 200 на 200 элементов.

На рис. 2 показаны изгибающие моменты M_x и M_y для центральной линии пластины $y=1/2$. Максимальное значение этих изгибающих моментов

(около 0.051) получилось в центре плиты, $x = 1/2$, $y = 1/2$, как и ожидалось. Это максимальное значение сравнимо с тем значением, которое получается по теории тонких плит и для плит умеренной толщины с граничными условиями типа SS-A (около 0.047). Отметим также, что полученная величина максимального изгибающего момента (≈ 0.051) заметно меньше величины момента в шарнирно-опертой балке $qL^2/8 = 0.125$.

На рис. 3 показаны изгибающие моменты M_x и M_y вдоль краев пластины $y = 0$ (или $y = 1$). Величина изгибающего момента M_y мала, что и ожидается для шарнирно-опертой плиты, рассчитанной по методу конечных элементов (теоретически эта величина должна быть нулем). Однако, как мы видим, величина изгибающего момента M_x вдоль этого края не является малой или нулевой величиной, как это происходит в случае тонких плит или плит умеренной толщины с граничными условиями типа SS-A. В центре стороны, при $x = 1/2$, изгибающий момент M_x равен примерно 0.0077, и знак этого момента совпадает со знаком максимального изгибающего момента в центре плиты, $x = 1/2$, $y = 1/2$. Однако ближе к углам пластины изгибающий момент M_x меняет свой знак и достигает своего максимального значения на этом краю (примерно 0.011). Эта величина примерно в 4 раза меньше, чем максимальный изгибающий момент в центре плиты, $x = 1/2$, $y = 1/2$, но несмотря на это она не может быть принята за нуль или проигнорирована. В этом и заключается основное отличие распределения изгибающих моментов в плите с граничными условиями типа SS-A и SS-B.

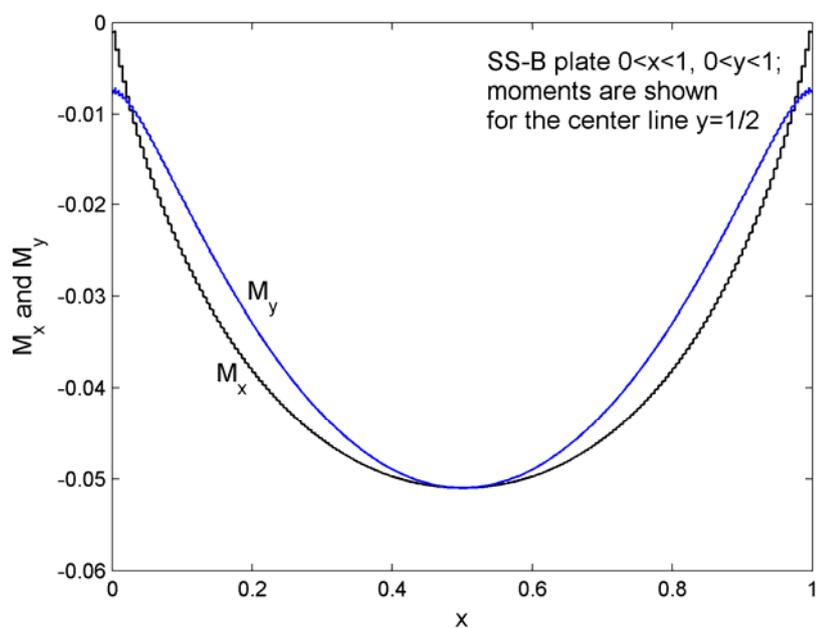


Рис. 2. – Распределение изгибающих моментов вдоль центральной линии пластины $y=1/2$.

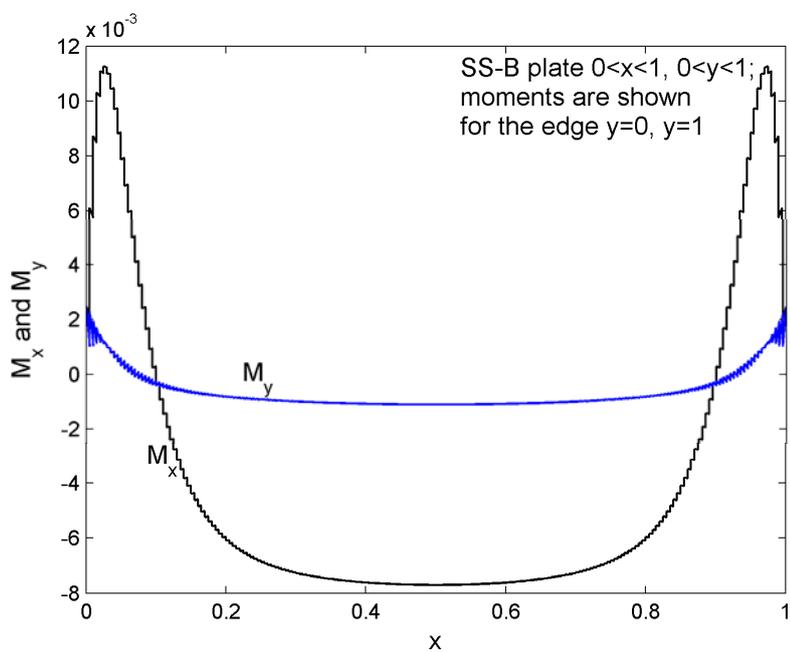


Рис. 3. – Распределение изгибающих моментов вдоль краев пластины $y=0$ или $y=1$.

Заключение

В этой статье рассматривается шарнирно-опертая плита умеренной толщины, находящаяся под действием равномерно-распределенной нагрузки. Для расчета этой плиты была использована теория толстых плит Миндлина, а численные результаты были получены методом конечных элементов. Граничные условия для этой плиты (типа SS-B) были выбраны так, чтобы значения углов поворота в плоскости краев пластины не были равны нулю, а наоборот, были равны нулю крутящие моменты. В этом проявилась особенность этой плиты и отличие этих граничных условий (типа SS-B) от стандартных граничных условий (типа SS-A), для которых задаются нулевые углы поворота в плоскости краев пластины.

Различия в распределении изгибающих моментов на краях пластины, которые получились для этих двух типов граничных условий, говорят о необходимости правильного учета граничных условий для плит умеренной толщины или для толстых плит.

Литература

1. Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.H. Shear deformable plates and shells: relationships with classical solutions. Elsevier Science Ltd., 2000. 296 p.
2. Ferreira A.J.M. Matlab Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures, Solid Mechanics and Its Applications, 157. Springer Science+Business Media B.V., 2009. 235 p.
3. Khennane A. Introduction to finite element analysis using MATLAB and Abaqus. Taylor & Francis Group, LLC, Boca Raton, 2013. 487 p.
4. Ma H.H., Gao X.-L., Reddy J.N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. Acta Mechanica, 220, 2011. pp. 217–235.
5. Rajapakse R.N.K.D., Selvadurai A.P.S. On the performance of Mindlin plate elements in modeling plate-elastic medium interaction: a comparative study.



International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23, 1986. pp. 1229–1244.

6. Soldatos K.P. A refined laminated plate and shell theory with applications. Journal of Sound and Vibration, 144(1), 1991, pp. 109–129.

7. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 18, 1951, pp. 31–38.

8. Kabir H.R.H. A double Fourier series approach to the solution of a moderately thick simply supported plate with antisymmetric angle-ply laminations. Computers & Structures, 43(4), 1992. pp. 769–774.

9. Kabir H.R.H. Analysis of a simply supported plate with symmetric angle-ply laminations. Computers and Structures, 51, 1994. pp. 299–307.

10. Chaudhuri R.A. On boundary-discontinuous double Fourier series solution to a system of completely coupled PDEs. International Journal of Engineering Science, 27(9), 1989. pp. 1005–1022.