

## Оптимизация результатов метода “Cut-Glue” аппроксимации экспериментальных данных с использованием роевого алгоритма

*Р.А. Нейдорф, И.В. Черногоров*

*Донской Государственный Технический Университет*

**Аннотация:** Построение математических моделей объектов экспериментального или компьютерного моделирования связано с математической обработкой экспериментальных данных. Полученные для них точечные зависимости выходных переменных от входных являются существенно нелинейными, кусочными, иногда разрывными. Аппроксимация таких зависимостей с использованием полиномиальных разложений или сплайн-функций, и затруднительна, и связана с большими погрешностями. Кардинально новое решение такой задачи предложено в статье. Данный метод, названный методом «Cut-Glue» аппроксимацией, основан на разбиении моделируемой зависимости на участки, аппроксимации каждого участка полиномиальными зависимостями, мультипликативном «вырезании» из каждой зависимости фрагментов по границам участка и аддитивном «склеивании» их в единую функцию - модель аппроксимируемой зависимости. Свойство аналитичности результирующей функции позволяет проводить исследование модели и использовать её в моделях динамики средств передвижения. Одним из этапов «Cut-Glue» метода выступает «Glue» процесс - аддитивное «склеивание» фрагментов в единую функцию. Для этого используется вспомогательная мультипликативно выделяющая функция. В состав этой функции входит параметр крутизны фронтов импульса. В данной работе разработанная модификация метода роящихся частиц применяется в задаче исследования и субоптимизации данного параметра. В качестве тестового стенда исследования разработанного алгоритма создано специальное программное средство.

**Ключевые слова:** оптимизация; аппроксимация; математическая модель; экспериментальные данные; эвристические методы; метод роящихся частиц.

### Введение

Моделирование сложных динамических объектов (летательных аппаратов, автомашин, технологических процессов и установок) сводится к получению системы дифференциальных уравнений, опирающихся на физические законы, характеризующие отдельные элементы объекта и их взаимосвязи, и связывающих реакцию объекта и совокупность внешних воздействий на него. Часто это связано с описанием различных существенно нелинейных явлений: механических эффектов сухого трения и люфта, аэродинамических эффектов «срыва потока» [1-4], сложных электромагнитных, термодинамических процессов [5, 6] и многими другими факторами. Обычно их невозможно получить теоретическими методами

---

ввиду неполного знания законов протекания этих процессов. В этом случае проводятся физические испытания реальных объектов или их масштабных моделей. Например, используется продувка в аэродинамических трубах макетов самолетов и автомобилей. Широко применяются эксперименты на универсальных системах компьютерного моделирования [2-4, 7, 8]. На основании таких экспериментов уточняются параметры моделей. Также возникают трудности, связанные с существенной нелинейностью этих моделей [7, 8].

В случае впервые разрабатываемых технических устройств, технологических процессов и установок, которые во многом создаются на основе эвристических представлений проектировщиков, аналитическое моделирование может быть вообще недоступным или давать весьма неудовлетворительную точность, поскольку определяется многочисленными трудно учитываемыми факторами. В этом случае целесообразно проводить построение моделей на основе их экспериментально снятых характеристик. Часто такие характеристики оказываются существенно нелинейными. Во многих случаях, при их аппроксимации статических характеристик оказывается достаточной кусочная аппроксимация. Однако в динамических моделях такое решение создает значительные сложности при решении моделей, и при их математических преобразованиях.

Предложенный метод "Cut-Glue" аппроксимации (CGA) основан на мультипликативном «вырезании» хорошо аппроксимируемых участков моделируемой зависимости и аддитивном «склеивании» их в единую аналитическую функцию (ЕАФ). При этом и для «вырезания» используется аналитическая функция, что обуславливает аналитические свойства итогового выражения. Последнее является основной отличительной особенностью и достоинством метода, т.к. позволяет не только численные, но и аналитические преобразования получаемой модели.

---

Однако на сегодняшний день эффективность предложенного решения задачи аппроксимации теоретически обоснована и практически подтверждена только для одномерных и двумерных зависимостей [1]. Обоснована возможность и перспективность применения предложенного подхода для аппроксимации зависимостей произвольной размерности. Это существенно расширяет область применения метода и его значимость в соответствующей области науки и практики.

"Cut the fragments" (CF) – процесс в методе CGA реализующий «вырезание» фрагмента аппроксимирующей некоторый участок экспериментальной зависимости по границам выбранного фрагмента [9]. Математически это соответствует разрезанию единой матрицы экспериментальных данных (ЭД) на несколько фрагментов с сохранением общих границ. Границы определяются условием точности описания участка аппроксимирующей аналитической функцией. Для этого используется вспомогательная мультипликативно выделяющая функция (МВФ) или т.н. эpsilon-функция от входящих в состав функции параметров крутизны фронтов импульса  $\varepsilon$ . В предыдущих работах [1] автор приводит условие наиболее эффективного варианта использования данного параметра. Но такая эффективность обуславливается только удобством программирования, и, как показывают исследования, эффективно только при достаточно точном воспроизведении аппроксимирующей функцией границ фрагмента [10].

"Glue the fragments" (GF) – процесс в методе CGA, обеспечивающий получение ЕАФ, описывающей исследуемую область характеристики объекта. Объединение фрагментов, т.е. их склейка после операции CF, осуществляется алгебраическим суммированием. После проведения ряда предварительных экспериментов авторами было установлено, что варьирование значений  $\varepsilon$  для различных координат в многомерном пространстве могут улучшать результат аппроксимации для GF процедуры.

---

## Постановка задачи

Целью работы является исследование МВФ, её аппроксимационных характеристик и общематематических специальных свойств, обеспечивающих формирование так называемых интервально изолированных функций (ИИФ), аппроксимирующих фрагменты ЭД (ФЭД) в пределах их границ с использованием локально аппроксимирующих функций (ЛАФ). Разработать методику обоснованного выбора параметров настройки МВФ, обеспечивающих максимальную точность аппроксимации.

## Методы проведения исследования

Поскольку согласно теоретическим основам CGA  $\varepsilon$  является вещественным числом, для оптимизации желательно использовать алгоритм из группы методов континуальной оптимизации. Кроме того, аналитическая сложность  $n$ -МВФ и результирующей функции CGA обуславливает применение поискового алгоритма оптимизации. Одними из хорошо зарекомендовавших себя методов для решения задач нахождения оптимальных параметров объектов исследования являются эвристические методы, алгоритмы которых основаны на поведении групп животных, насекомых и т.д. Явным представителем данного направления является метод роя частиц (МРЧ), алгоритм которого схож с поведенческими особенностями роя насекомых [10].

Ранее авторами был выполнен ряд исследований возможностей и эффективности МРЧ, а также проведена его модификация с целью повышения точности, ресурсной эффективности нахождения оптимумов, с целью расширения функционала его применения, в частности, приспособления его к решению многоэкстремальных задач. Однако, предварительные исследования позволили выявить, что в двумерном случае  $\varepsilon$  имеют только одно значение, которое меняется в зависимости от выбранного критерия и рассматриваемого диапазона значений в матрице абсолютных

ошибок. В данной работе ставится задача исследования параметра  $\varepsilon$  в двумерном пространстве поиска для каждого выделенного фрагмента. Также необходимо провести сравнение полученных результатов и результатов из предварительного исследования. Это подразумевает проведения дополнительного исследования, структурной модификации и параметрической оптимизации параметров механической модели МРЧ.

### Модификация математической модели МРЧ

Математическая модель (ММ) МРЧ построена на основополагающих уравнениях движения материальной точки.

Позиция и скорость частицы:

$$\vec{X}_{ti} = \vec{X}_{(t-\Delta t)i} + \vec{V}_{(t-\Delta t)i} \cdot \Delta t,$$

$$\vec{V}_{ti} = \vec{V}_{(t-\Delta t)i} + \vec{A}_{(t-\Delta t)i} \cdot \Delta t,$$

где:  $\vec{X}_{(t-\Delta t)i}$  - предыдущая позиция частицы;  $\vec{V}_{(t-\Delta t)i}$  - предыдущая скорость частицы;  $\Delta t$  - интервал времени (итерация);  $\vec{A}_{(t-\Delta t)i}$  - ускорение частицы на предыдущей итерации, причем

$$\vec{A}_i = \vec{A}_{gri} + \vec{A}_{fri}.$$

Здесь ускорение, вызываемое биоаналогом гравитационного притяжения частиц к экстремальной точке;

$$\vec{A}_{gri} = \sum \frac{\hat{D}_i^Q g^Q m_i^Q}{(r_i^Q)^2 + (\varepsilon^Q)^2}, Q \in \{G, L_i\}, \quad (1)$$

а замедление трением состоит из ламинарной  $\vec{A}_{visi}$  и турбулентной  $\vec{A}_{turi}$  составляющих:

$$\vec{A}_{fri} = \vec{A}_{visi} + \vec{A}_{turi}. \quad (2)$$

В выражении (1)  $\vec{A}_{visi}$  - притяжение частицы к глобальному экстремуму роя;  $\vec{A}_{turi}$  - притяжение частицы к лучшей найденной позиции самой частей за всё время;  $\hat{D}_i^Q$  - орт, направленный в сторону точки притяжения;  $g^Q$  - прототип гравитационной постоянной;  $m_i^Q$  - масса центра притяжения;  $r_i^Q$  - расстояние между позицией частиц и размытым положением целевой точки притяжения;  $\varepsilon^Q$  - естественный ограничитель ускорения, исключающий прохождение мимо любой материальной точки на расстоянии  $\Delta X < \varepsilon$ .

В выражении (2) вязкостное трение задается формулой

$$\vec{A}_{visi} = -\mu_{vis} \vec{V}_{(t-\Delta t)i},$$

а турбулентное трение формулой:

$$\vec{A}_{turi} = -\mu_{tur} \left| \vec{V}_{(t-\Delta t)i} \right| \vec{V}_{(t-\Delta t)i},$$

где  $\mu_{tur}$ ,  $\mu_{vis}$  - коэффициенты вязкостного и турбулентного трения, соответственно.

Кроме того, в ММ движения частиц введен механизм отражения частиц от границы исследуемой области с потерей части энергии движения.

Для учета в ММ стохастических поведенческих составляющих в него введено уравнение случайной флуктуации (искажения) параметров:

$$\lambda^{\xi}(\varphi) = \lambda \cdot (1 + 2\varphi \cdot (rnd(1) - 0.5)),$$

где:  $\lambda$  - номинальное значение флуктуирующего параметра;  $\varphi$  - коэффициент искажения параметра, относительно номинального значения;  $rnd(1)$  - случайное вещественное число в диапазоне  $[0; 1]$ .

Коллективные параметры роя, введенные в математическую модель МРЧ позволяют адаптироваться рою в разнородных задачах и улучшать поисковые результаты. К параметрам метода относятся:

- количество частиц в рое -  $P$ ;
  - количество допустимых шагов (итераций) -  $I$ ;
  - прототипы гравитационных постоянных и их размытия-  $g^Q$  и  $\varphi_i^Q$ ;
  - коэффициенты размытия центров притяжения –  $\varphi_{point}^Q$ ;
  - коэффициенты вязкостного и турбулентного трения, и их размытия -  $\mu_{vis}$ ,  $\varphi_{vis}$ ,  $\mu_{tur}$  и  $\varphi_{tur}$ ;
  - коэффициент диссипации и его размытие –  $\mu_{dis}$  и  $\varphi_{dis}$ .
- Флуктуации подвергаются все параметры роя и его частиц.

### Исследование влияния параметров МВФ на качество аппроксимации при "склеивании" ИИФ.

Последним этапом общей процедуры CGA является вырезание ИИФ из ФАФ и последующее их «склеивание» в единую ММ исследуемой зависимости. Такое преобразование производится с использованием следующих формул:

$$f_{(i_1, \dots, i_n)}(\bar{x}) = \phi_{(i_1, \dots, i_n)}(\bar{x}) \cdot \lambda_{(i_1, \dots, i_n)}(\bar{x}, \bar{x}_{(i_1-1, \dots, i_n-1)}, \bar{x}_{(i_1, \dots, i_n)}, \varepsilon_j),$$
$$\lambda_{(i_1, \dots, i_n)}(\bar{x}, \bar{x}_{(i_1-1, \dots, i_n-1)}, \bar{x}_{(i_1, \dots, i_n)}) = \prod_{j=1}^n \lambda_{j_i}(x_j, x_{j_{i-1}}, x_{j_i}, \varepsilon_j),$$
$$\lambda_{j_i}(x_j, x_{j_{i-1}}, x_{j_i}, \varepsilon_j) = \frac{\alpha \cdot \sigma_l(x_j, x_{j_{i-1}}, \varepsilon_j) \cdot \sigma_r(x_j, x_{j_i}, \varepsilon_j)}{\delta(x_j, x_{j_{i-1}}, x_{j_i}, \varepsilon_j)}, \quad (3)$$

где:  $\sigma_l(x_j, x_{j_{i-1}}, \varepsilon_j) = x_j - x_{j_{i-1}} + \sqrt{(x_j - x_{j_{i-1}})^2 + \varepsilon_j^2},$

$$\sigma_r(x_j, x_{j_i}, \varepsilon_j) = x_j - x_{j_i} + \sqrt{(x_j - x_{j_i})^2 + \varepsilon_j^2},$$

$$\delta(x_j, x_{j_{i-1}}, x_{j_i}, \varepsilon_j) = \sqrt{(x_j - x_{j_{i-1}})^2 + \varepsilon_j^2} \cdot \sqrt{(x_{j_i} - x_j)^2 + \varepsilon_j^2},$$

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \sum_{i_j=1}^n f_{(i_1, \dots, i_j, \dots, i_n)}(\bar{x}),$$



Исходные данные для предварительного решения поставленной задачи были искусственно сгенерированы авторами. В результате выбраны параметры условного эксперимента: уравнение функции в форме полинома 3 степени по двум переменным и соответствующие коэффициенты полинома –  $b$ :

$$F(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_{111}x^3 + b_{112}x^2y + b_{122}xy^2 + b_{222}y^3,$$

где:  $b_0=200$ ,  $b_1=8$ ,  $b_2=-12$ ,  $b_{11}=1.95$ ,  $b_{12}=-0.18$ ,  $b_{22}=1.72$ ,  $b_{111}=0.08$ ,  $b_{112}=0.023$ ,  $b_{122}=-0.08$ ,  $b_{222}=0.1$ ; а также вектор  $x$  размерностью 10, вектор  $y$  размерностью 8, задающие сетку моделируемого эксперимента.

Полученная матрица разбита на 4 смежных участка с общими границами. На рис. 1 отображены исходные экспериментальные данные. Строкам на рисунке соответствуют значения из  $x$ , столбцам соответствуют значения из  $y$ . На рис. 2 отображены графики по исходным данным.

		$y = (-5.2 \quad -3.6 \quad -2 \quad -0.4 \quad 1.2 \quad 2.8 \quad 4.4 \quad 6)$									
		1				3					
$F(x,y) =$		380.824	342.145	310.674	288.87	279.19	284.092	306.033	347.471	$x =$	-9.6
		343.891	305.568	273.716	250.794	239.259	241.568	260.18	297.551		-7.8
		315.786	278.058	246.064	222.262	209.11	209.066	224.586	258.128		-6
		297.209	260.314	228.417	203.974	189.444	187.283	199.95	229.903		-4.2
		288.86	253.037	221.475	196.629	180.959	176.921	186.974	213.574		-2.4
		291.439	256.927	225.937	200.928	184.356	178.68	186.356	209.843		-0.6
		305.646	272.682	242.504	217.569	200.334	193.258	198.797	219.409		1.2
		332.18	301.004	271.876	247.254	229.594	221.356	224.996	242.972		3
		371.742	342.591	314.752	290.681	272.836	263.674	265.653	281.231		4.8
		425.031	398.145	371.832	348.551	330.758	320.911	321.469	334.887		6.6
		2				4					

Рис. 1. – Матрица экспериментальных данных

Для каждого участка получены уравнения регрессии 2 степени с соответствующими коэффициентами  $b$ , отображённые в таблице №1:

$$\phi^i(x, y) = b_0^i + b_1^i x + b_2^i y + b_{11}^i x^2 + b_{12}^i xy + b_{22}^i y^2, i \in \{1, 2, 3, 4\},$$



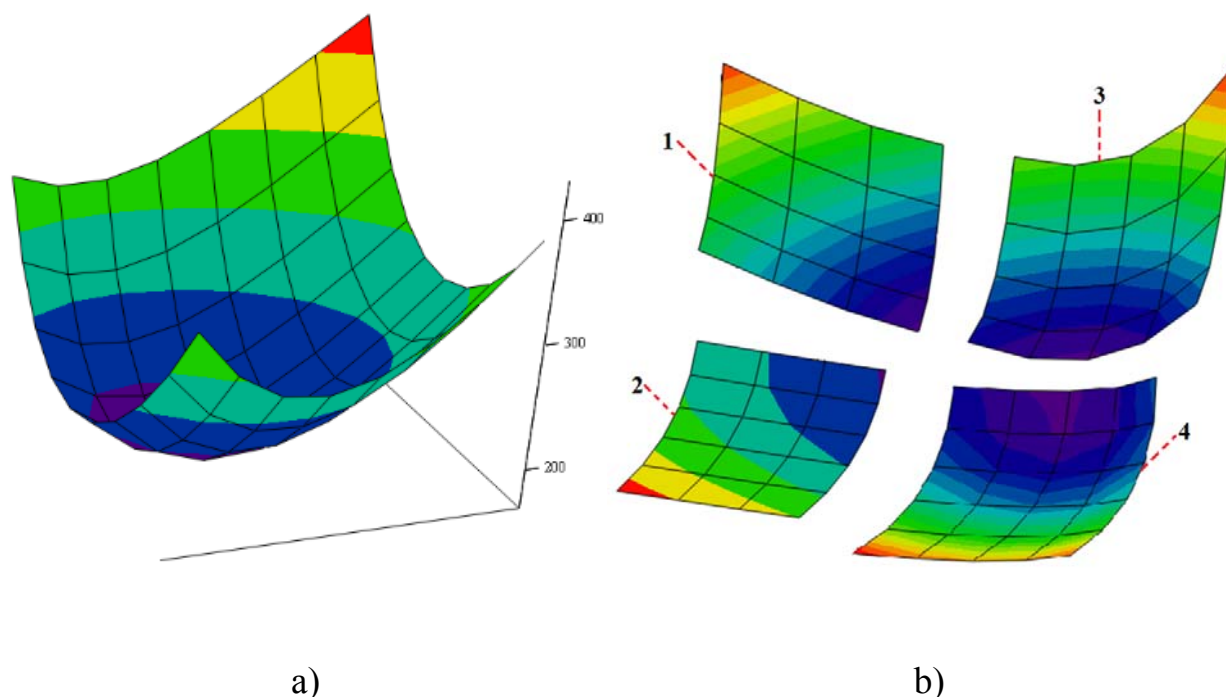


Рис. 2. – Графики экспериментальны данных: а) единый, б) разбитый по выделенным фрагментам

Таблица № 1

Полученные коэффициенты 4-х уравнений регрессии

$b^1$	$b^2$	$b^3$	$b^4$
$b_0$	$-8 \cdot 10^{-3}$	-0.904	0.3646
$b_1$	1.36	3.040	0.712
$b_2$	-11.82	-16.84856	-14.65208
$b_{11}$	196.6	199.966688	198.317312
$b_{12}$	5.6587	7.05072	8.70432
$b_{22}$	1.5256	1.6544	2.0116

В соответствии с постановкой задачи для проведения экспериментов выбраны  $(\varepsilon_{xi}, \varepsilon_{yi}) \in (0, 1]$ ,  $i \in \{1,2,3,4\}$ , количество итераций – 300, количество частиц – 100. Остальные параметры механической модели МРЧ были настроены под рассматриваемую задачу. Критериями оценки и минимизации ошибки аппроксимации всей зависимости и фрагментов в предварительном исследовании выбраны среднеквадратическое отклонение (СКО) и максимальная ошибка в матрице абсолютных ошибок. Кроме того, опыт показал, что целесообразно выделить ключевые участки матрицы, к которым

также применить выбранные критерии оценки. Таким образом, объектами оценки точности аппроксимации могут быть несколько результирующих математических конструкций, получаемых в результате CGA. К ним относится, во-первых, вся матрица экспериментальных данных. Во-вторых, может рассматриваться матрица без приграничных значений (согласно (3), угловые и краевые значения функции, за исключением сопрягающих участков, мало зависят от  $\varepsilon$ , а, в большей степени, от порядка аппроксимируемой зависимости). В-третьих, общие грани «склеиваемых» фрагментов, не включая приграничные значения всей матрицы (данные элементы больше всего зависят от  $\varepsilon$ ). В-четвертых, и в-пятых, отдельно рассматриваемые общие ребра «склеиваемых» фрагментов (вертикальные и горизонтальные). Все указанные объекты оценки точности CGA использованы и в текущей работе.

В данном исследовании агенты МРЧ производят поиск в 8-ми мерном пространстве и отображение их движения без выделения проекций в подпространство максимум 3 порядка невозможно. Результаты проведенных экспериментов по двум выбранным критериям и по пяти выделяемым участкам в матрице абсолютных ошибок отображены в таблице №2.

Общее время работы алгоритма, затраченное на проведение экспериментов по 300 итераций – ~1.1 сек. Время работы алгоритма, затраченное на нахождение экстремумов, описанных в таблице №2 на ~160 итерации – ~0,7 сек. Как видно из таблицы №2 получаемые значения СКО, Макс,  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  крайне зависимы от рассматриваемого критерия и выбранного диапазона значений в матрице абсолютных ошибок.

Результаты, демонстрируемые в таблице №3, полученные при оптимизации  $\varepsilon$  для каждого фрагмента в текущей работе и оптимизации  $\varepsilon$  для всех фрагментов в предварительных исследованиях.

---

Общее время работы алгоритма, затраченное на проведение экспериментов по 300 итераций – ~1.1 сек. Время работы алгоритма, затраченное на нахождение экстремумов, описанных в таблице №2 на ~160 итерации – ~0,7 сек. Как видно из таблицы №2 получаемые значения СКО, Макс,  $\epsilon_x$  и  $\epsilon_y$  крайне зависимы от рассматриваемого критерия и выбранного диапазона значений в матрице абсолютных ошибок.

Таблица № 2

Результаты экспериментов

Рассматриваемая область значений в матрице абс. ошибок	Крит.	СКО%	Макс%	$\epsilon_{x1}$	$\epsilon_{y1}$	$\epsilon_{x2}$	$\epsilon_{y2}$	$\epsilon_{x3}$	$\epsilon_{y3}$	$\epsilon_{x4}$
Вся матрица	СКО	9,14	26,93	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99
	Макс	9,39	26,75	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99
Матрице без границ	СКО	5,62	26,87	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,7	0,44	$1 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-6}$	0,99
	Макс	5,77	26,75	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99
Границы «Glue» подматриц	СКО	2,98	28,51	$1 \cdot 10^{-6}$	0,81	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,47
	Макс	3,1	26,75	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99
Горизонталь границ «Glue» подматриц	СКО	3,65	29,16	0,99	0,99	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99
	Макс	3,71	26,77	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99
Вертикаль границ «Glue» подматриц	СКО	0,39	35,49	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99 <sup>6</sup>	$1 \cdot 10^{-6}$	0,25	0,99	0,99
	Макс	1,06	26,75	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99	0,99	0,99	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0,99

Таблица № 3

Сравнение результатов в предварительном и текущем исследовании

Рассматриваемая область значений в матрице абсолютных ошибок	Крит.	Эксперимент			
		Пилотный	Текущий	Пилотный	Текущий
		Макс, %		СКО, %	
Вся матрица	СКО	11,08	9,14	32,35	26,93
	Макс	11,57	9,39	29,7	26,75
Матрице без границ	СКО	7,65	5,62	31,42	26,87
	Макс	7,88	5,77	29,71	26,75
Границы «Glue» подматриц	СКО	3,74	2,98	30,07	28,51
	Макс	3,81	3,1	29,7	26,75
Горизонталь границ «Glue» подматриц	СКО	4,32	3,65	30,07	29,16
	Макс	4,36	3,71	29,7	26,77
Вертикаль границ «Glue» подматриц	СКО	0,54	0,39	33,49	35,49
	Макс	0,9	1,06	29,7	26,75

Результаты, демонстрируемые в таблице №3, полученные при оптимизации  $\varepsilon$  для каждого фрагмента в текущей работе и оптимизации  $\varepsilon$  для всех фрагментов в предварительных исследованиях.

Сравнение данных показало следующие результаты: общее время работы алгоритма, затраченное на проведение экспериментов по 300 итераций, уменьшилось на ~50%, СКО и максимальная ошибка в матрице абсолютных ошибок уменьшились на ~17% и на ~8,3% соответственно.

### **Заключение.**

По результатам описанной работы можно сделать следующие выводы:

- параметр  $\varepsilon$  не обладает, в общем случае, универсальным значением для всех фрагментов;
- в двумерном случае  $\varepsilon$  для каждого фрагмента имеет разное значение, которое меняется в зависимости от выбранного критерия и рассматриваемого диапазона значений в матрице абсолютных ошибок;
- при оптимизации  $\varepsilon$  для каждого фрагмента СКО и максимальная ошибка в матрице абсолютных ошибок решаемого примера уменьшились на ~17%, и ~8,3% соответственно, относительно результатов общей оптимизации  $\varepsilon$  для всей совокупности фрагментов, полученных в предварительных исследованиях;
- разработанная авторами модификация МРЧ показала себя эффективным инструментом решения задач субоптимизации параметра  $\varepsilon$  для двумерной МВФ CGA.

### **Благодарность**

*Работа выполнена и опубликована при финансовой поддержке РФФИ, проекты №18-08-01178/18 А и №18-07-20056 Г.*

## Литература

1. Neydorf R. Bivariate "Cut-Glue" Approximation of Strongly Nonlinear Mathematical Models based on Experimental Data. 2015. Vol. 8(1). pp. 47-54. Doi: 10.4271/2015-01-2394.
2. Neydorf R., Sigida Y. Identification of Traction and Power Characteristics of Air-Screw Propulsors in Mathematical Description of Airship // SAE Technical Paper. 2014. Doi: 10.4271/2014-01-2134.
3. Neydorf R., Sigida Y., Voloshin V. et al Stability Analysis of the MAAT Feeder Airship During Ascent and Descent with Wind Disturbances // SAE Technical Paper. 2013. Doi: 10.4271/2013-01-2111.
4. Voloshin V., Chen Y., Neydorf R. et al Aerodynamic Characteristics Study and Possible Improvements of MAAT Feeder Airships // SAE Technical Paper. 2013. Doi: 10.4271/2013-01-2112.
5. Артемов И.Н., Ениватов А.В., Савонин И.А. Оптимизация тепловой схемы котельной с утилизатором тепла дымовых газов / Инженерный вестник Дона, 2018, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4764/](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4764/).
6. Пирожникова А.П., Муро Г.Э., Говорунов М.А. Оптимизация процесса теплопередачи сборной теплообменной панели солнечного коллектора / Инженерный вестник Дона. 2018, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5114](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5114/).
7. Pshikhopov V., Medvedev M., Neydorf R. et al Impact of the Feeder Aerodynamics Characteristics on the Power of Control Actions in Steady and Transient Regimes // SAE Technical Paper. 2012. Doi: 10.4271/2012-01-2112.
8. Pshikhopov V., Medvedev M., Gaiduk A. et al Mathematical Model of Robot on Base of Airship // Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control / Florence, Italy, 10-13 December. 2013. pp. 959-964. doi:10.1109/CDC.2013.6760006.

9. Нейдорф Р.А., Черногоров И.В. Исследование граничных свойств мультипликативно выделяющей функции в задаче cut-glue аппроксимации // Сборник трудов XXXI Международной научной конференции «Математические Методы в Технике и Технологиях - ММТТ-31». Том 5, 2018. С. 31-41.

10. Eberhart R.C., Kennedy J.A. A new optimizer, using particle swarm theory // Proceedings of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science / Nagoya, Japan, 4-6 October. 1995. pp. 39-43. doi:10.1109/MHS.1995.494215.

### References

1. Neydorf R. Bivariate "Cut-Glue" Approximation of Strongly Nonlinear Mathematical Models based on Experimental Data. 2015. Vol. 8(1). pp. 47-54. Doi: 10.4271/2015-01-2394.

2. Neydorf R., Sigida Y. SAE Technical Paper. 2014. Doi: 10.4271/2014-01-2134.

3. Neydorf R., Sigida Y., Voloshin V. et al SAE Technical Paper. 2013. Doi: 10.4271/2013-01-2111.

4. Voloshin V., Chen Y., Neydorf R. et al SAE Technical Paper. 2013. Doi: 10.4271/2013-01-2112.

5. Artemov I.N., Enivatov A.V., Savonin I.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2018, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4764/.

6. Pirozhnikova A.P., Muro G.Je., Govorunov M.A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus). 2018, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5114.

7. Pshikhopov V., Medvedev M., Neydorf R. et al SAE Technical Paper. 2012. Doi: 10.4271/2012-01-2112.

8. Pshikhopov V., Medvedev M., Gaiduk A. et al Proceedings of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. Florence, Italy, 10-13 December. 2013. pp. 959-964. doi:10.1109/CDC.2013.6760006.



9. Nejdorf R.A., Chernogorov I.V. Issledovanie granichnyh svojstv mul'tiplikativno vydel'ajushhej funkicii v zadache cut-gluе approksimacii [Study of the multiplicatively separating function boundary properties in the Cut-Glue approximation problem]. Sbornik trudov XXXI Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Matematicheskie Metody v Tehnike i Tehnologijah - MMTT-31» (Rus). vol 5, 2018. pp. 31-41.

10. Eberhart R.C., Kennedy J.A. Proceedings of the 6th International Symposium on Micro Machine and Human Science. Nagoya, Japan, 4-6 October. 1995. pp. 39-43. doi:10.1109/MHS.1995.494215.