Трехкомпонентный поток заявок в замкнутых системах массового обслуживания с бесконечной емкостью накопителя и ограничением по времени ожидания

Н.А. Хасанов, А.С. Титовцев, Т.Э. Петров

Казанский национальный исследовательский технологический университет

Аннотация: В данной статье исследуются вероятностные характеристики замкнутых систем массового обслуживания с ожиданием и входящим потоком «терпеливых» и «нетерпеливых» требований. Уникальность работы заключается в анализе системы с трехкомпонентной структурой входящего потока требований, что позволяет провести более детальный анализ динамики обслуживания и поведения заявок в условиях ограничений на время ожидания. Выведены основные аналитические выражения для определения вероятностных характеристик, а также для определения основных показателей эффективности работы системы. Результаты работы представляют интерес как для теоретического изучения систем массового обслуживания, так и для практического применения в области оптимизации управления потоками заявок.

Ключевые слова: ожидание, очередь, обслуживание, марковский процесс, система массового обслуживания с ограничениями, поток заявок, имитационное моделирование, математическая модель.

Введение

Системы массового обслуживания играют значительную роль в различных сферах деятельности, включая телекоммуникации, производство, транспорт, здравоохранение и многие другие. Одно из допущений, принятых при анализе моделей подобных систем в работах [1–3] состоит в однородности потока входных требований. Модели, рассмотренные в работах [4, 5], являются схожими с рассматриваемой моделью, но с ограничением по максимальной длине очереди.

Рассмотрим замкнутую систему массового обслуживания с трехкомпонентным потоком требований следующих типов:

1) «Терпеливые» заявки, ожидающие обслуживания в очереди;

2) «Терпеливые заявки, ожидающие обслуживания в очереди не более заданного времени;

3) «Нетерпеливые» заявки, покидающие систему при наличии очереди.

Ввиду того, что время между поступлениями требований в систему является случайной величиной, период поступления заявок в систему является усредненным значением этой величины или, другими словами, математическим ожиданием. В таком случае, интенсивность входящего потока требований, очевидно, будет определяться как $\lambda_i = 1/\bar{t}_{вх.}$. Интенсивность потока заявок, покидающих систему $\nu = 1/\bar{t}_{ожид.}$, интенсивность обслуживания $\mu = 1/\bar{t}_{обсл.}$.

Замкнутость системы проявляется в том, что число заявок (клиентов) остается постоянным, и отсутствуют внешние входящие потоки. Подразумевается, что заявки поступают в систему согласно распределению Пуассона, что позволяет использовать марковские свойства для анализа потоков. Время для обслуживания каждой заявки подчиняется экспоненциальному распределению, что упрощает математические выкладки и расчеты.

Построение модели предполагает, что вся система может быть охарактеризована следующими вводными параметрами: общее число требований в источнике (N), количество обслуживающих устройств (m), интенсивность входящего потока требований (λ_i), интенсивность обслуживания (μ), интенсивность потока необслуженных заявок (ν).

Определение вероятностных характеристик стационарного режима работы системы

Согласно вводным данным о неоднородности входящего потока, при наличии свободных терминалов обслуживания, входящий поток будет иметь интенсивность $\Lambda_0 = \lambda + \lambda_0 + \lambda_1$, а при наличии очереди $\Lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_1$. Поток обслуживания, в свою очередь, с учетом ограничения на время ожидания будет иметь вид $m\mu$ при отсутствии очереди и $m\mu+(N–m)\nu$ при наличии очереди.

Для отображения переходов, происходящих в описанной системе, составлен граф системы массового обслуживания.

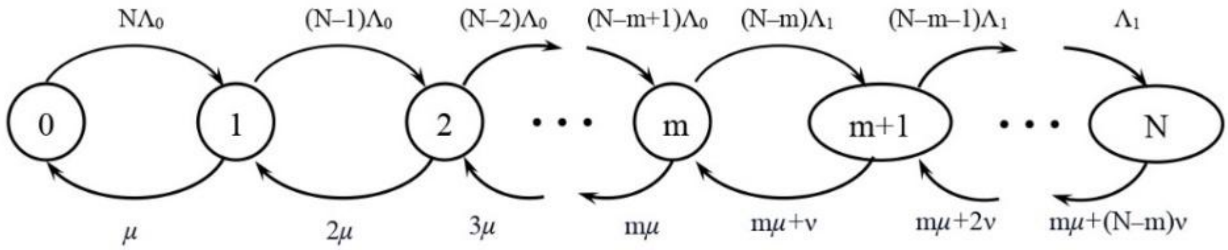

Рис. 1. – Граф системы массового обслуживания

Таким образом, данная система имеет следующие основные возможные состояния:

– «0» – отсутствуют входящие заявки;

– «1» – в системе находится одна заявка, которая обслуживается через один канал, очереди нет;

– «2» – в системе имеется две заявки, которые обслуживаются двумя каналами, очереди также нет;

– «*m*» – количество заявок соответствует количеству обслуживающих каналов, очереди отсутствуют;

– «*m*+1» – количество заявок превышает количество каналов обслуживания на одну, одна заявка ожидает в очереди. Интенсивность входящего потока заявок здесь и далее снижена, ввиду отсутствия компонента λ;

- «*N*» – все заявки из источника находятся в системе, при этом число заявок в очереди составляет (*N*–*m*).

Для математического представления переходов системы из одного состояние в другое составим систему уравнений Колмагорова, приняв $R_i = \Lambda_i / \mu$. Параметр R_i в таком случае показывает какое количество заявок поступает в систему за время обслуживания одной заявки [6] и используется для упрощения дальнейшей записи.

$$\begin{cases} P_0 N\Lambda_0 = P_1\mu \\ P_1\left(N-1\right)\Lambda_0 + P_1\mu = P_0 N\Lambda_0 + 2P_2\mu \\ P_2\left(N-2\right)\Lambda_0 + 2P_2\mu = P_1\left(N-1\right)\Lambda_0 + 3P_3\mu \\ \vdots \\ P_{m-1}\left(N-m+1\right)\Lambda_0 + P_{m-1}\left(m-1\right)\mu = P_{m-2}\left(N-m+2\right)\Lambda_0 + P_m m\mu \\ P_m\left(N-m\right)\Lambda_1 + P_m m\mu = P_{m-1}\left(N-m+1\right)\Lambda_0 + P_{m+1}\left(m\mu+\nu\right) \\ P_{m+1}\left(N-m-1\right)\Lambda_1 + P_{m+1}\left(m\mu+\nu\right) = P_m\left(N-m\right)\Lambda_1 + P_{m+2}\left(m\mu+2\nu\right) \\ \vdots \\ P_{N-1}\Lambda_1 + P_{N-1}\left(m\mu+\left(N-m-1\right)\nu\right) = 2P_{N-2}\Lambda_1 + P_N\left(m\mu+\left(N-m\right)\nu\right) \\ P_N\left(m\mu+\left(N-m\right)\nu\right) = P_{N-1}\Lambda_1 \end{cases}$$

Выразим вероятность каждого из состояний системы через P_0:

$$P_1 = NR_0 P_0 = \frac{N!R_0}{\left(N-1\right)!}P_0$$

$$P_2 = \frac{\left(N-1\right)R_0}{2}P_1 = \frac{N\left(N-1\right)R_0^2}{2}P_0 = \frac{N!R_0^2}{\left(N-2\right)!2!}P_0$$

$$P_3 = \frac{\left(N-2\right)R_0}{3}P_2 = \frac{N\left(N-1\right)\left(N-2\right)R_0^3}{3!} = \frac{N!R_0^3}{\left(N-3\right)!3!}P_0$$

$$P_m = \frac{(N-m+1)R_0}{m}P_{m-1} = \frac{N(N-1)\ldots\left(N-(m-1)\right)R_0^m}{m!}P_0 = \frac{N!R_0^m}{(N-m)!m!}P_0$$

$$P_{m+1} = \frac{(N-m)\Lambda_1}{\mu(m+\beta)}P_m = \frac{(N-m)R_1}{\beta\left(\frac{m}{\beta}+1\right)}\frac{N!R_0^m}{(N-m)!m!}P_0 = \frac{R_1}{\beta\left(\frac{m}{\beta}+1\right)}\frac{N!R_0^m}{(N-m-1)!m!}P_0$$

$$P_{m+2} = \frac{(N-m-1)\Lambda_1}{\mu(m+2\beta)}P_{m+1} = \frac{(N-m-1)(N-m)R_1^2}{\beta^2\left(\frac{m}{\beta}+1\right)\left(\frac{m}{\beta}+2\right)}\frac{N!R_0^m}{(N-m)!m!}P_0 =$$

$$=\frac{R_1^2}{\beta^2\left(\frac{m}{\beta}+1\right)\left(\frac{m}{\beta}+2\right)}\frac{N!R_0^m}{(N-m-2)!m!}P_0$$

$$\sum_{i=0}^{N}P_i=1 \tag{1}$$

Используя условие нормировки (1), получим:

$$P_0=\left[\sum_{i=0}^{m}\frac{N!R_0^i}{(N-i)!i!}+\sum_{i=m+1}^{N}\left(\frac{R_1}{\beta}\right)^{i-m}\left[\left(\frac{m}{\beta}+1\right)_{i-m}\right]^{-1}\frac{N!R_0^m}{(N-i)!m!}\right]^{-1}$$

Таким образом распределение вероятностей в рассматриваемой СМО:

$$P_i=\begin{cases}\frac{N!R_0^i}{(N-i)!i!}P_0,\ i\le m\\ \left(\frac{R_1}{\beta}\right)^{i-m}\left[\left(\frac{m}{\beta}+1\right)_{i-m}\right]^{-1}\frac{N!R_0^m}{(N-i)!m!}P_0,\ m<i\le N\end{cases}$$

Среднее число заявок в системе:

$$\bar{k}=\sum_{i=0}^{N}iP_i$$

Среднее число заявок на обслуживании:

$$\bar{m}=m-\sum_{i=0}^{m-1}(m-i)P_i$$

Средняя длина очереди:

$$\bar{l}=\bar{k}-\bar{m}$$

Вероятность немедленного обслуживания:

$$P_{обсл}=\frac{1}{N-\bar{k}}\sum_{i=0}^{m-1}(N-i)P_i$$

Вероятность ожидания обслуживания:

$$P_{ож}=\frac{1}{N-\bar{k}}\sum_{i=m}^{N-1}(N-i)P_i$$

Результаты данной работы могут быть полезны для создания и оптимизации реальных систем [7,8], систем с наличием дополнительных требований [9–11] и объектов, для которых применима приведенная модель системы массового обслуживания.

Литература

1. Кирпичников А.П., Банг Н.Т., Куи Ч.К. Среднее число заявок в очереди на обслуживание в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди // Вестник Технологического университета. 2017. №6. С. 87-92.

2. Осипов Г.С. Компьютерное моделирование систем массового обслуживания с ограничениями // Современные наукоемкие технологии. 2019. №12-2. С. 293-298.

3. Царькова Е. Г. Математическая модель управления системой массового обслуживания с динамической дисциплиной обслуживания заявок // Инженерный вестник Дона, 2022, №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7638/.

4. Петров Т.Э., Титовцев А.С., Хасанов Н.А. Вероятностные характеристики замкнутых систем обслуживания с ожиданием, отказами и ограничением по длине очереди // Научно-технический вестник Поволжья. 2023. №12. С. 101-102.

5. Kirpichnikov A.P., Titovtsev A.S. On the problems of queues in mixed type queuing systems with random quantity of sources and size-limited queues // Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol.800. pp. 68-82.

6. Кирпичников А.П., Банг Н.Т., Куи Ч.К. Общее число требований, находящихся в системе массового обслуживания с ограниченным средним временем пребывания заявки в очереди // Вестник Технологического университета. 2017. №9. С. 93-96.

7. Панкратов А.А., Анисимова Г.Б. Создание информационной системы для оптимизации работы автостоянки // Инженерный вестник Дона, 2018, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5407/.

8. Аксенов К.А., Попов А.В. Использование теории систем массового обслуживания в информационной системе оптимизации процессов логистики в автомобильном бизнесе // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. 2008. №2(20). С. 168-170.

9. Шайдуллина Н.К., Печеный Е.А., Нуриев Н.К. Моделирование процесса администрирования системы массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок // Современные наукоемкие технологии. 2023. №11. С. 81-86.

10. Nazarov A., Kvach A., Sztrik J. Comparative analysis of methods of residual and elapsed service time in the study of the closed retrial queuing system M/GI/1//N with collision of the customers and unreliable server // Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol.800. pp. 97-110.

11. Самерханов И.З., Печеный Е.А., Нуриев Н.К. Система массового обслуживания с каналами различной производительности, функционирующая в условиях смешанных потоков // Современные наукоемкие технологии. 2024. №3. С. 87-92.

References

1. Kirpichnikov A.P., Bang N.T., Kui C.K. Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta. 2017. №6. pp. 87-92

2. Osipov G.S. Sovremennye naukoemkie tekhnologii. 2019. №12-2. pp. 293-298.

3. Tsar'kova E.G. Inzhenernyj vestnik Dona. 2022. №5. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2022/7638/.

4. Petrov T.E., Titovtsev A.S., Khasanov N.A. Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya. 2023. №12. pp. 101-102.

5. Kirpichnikov A.P., Titovtsev A.S. Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol.800. pp. 68-82.

6. Kirpichnikov A.P., Bang N.T., Kui C.K. Vestnik Tekhnologicheskogo universiteta. 2017. №9. pp. 93-96.

7. Pankratov A.A., Anisimova G.B. Inzhenernyj vestnik Dona. 2018. №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5407/.

8. Aksenov K.A., Popov A.V. Zhurnal nauchnykh publikatsiy aspirantov i doktorantov. 2008. №2(20). pp. 168-170.

9. Shaydullina N.K., Pechenyy E.A., Nuriev N.K. Sovremennye naukoemkie tekhnologii. 2023. №11. pp. 81-86.

10. Nazarov A., Kvach A., Sztrik J. Communications in Computer and Information Science. 2017. Vol.800. pp. 97-110.

11. Samerkhanov I.Z., Pechenyy E.A., Nuriev N.K. Sovremennye naukoemkie tekhnologii. 2024. №3. pp. 87-92.

Дата поступления: 10.09.2024

Дата публикации: 19.10.2024