

## Построение вероятностной модели жизненного цикла изделия по параметрам уязвимости

*С.А. Базуева*

*Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова*

**Аннотация:** В статье исследован параметр уязвимости, который позволяет формировать вероятностную модель жизненного цикла изделия, учитывающую динамику. Для решения поставленной в статье задачи определена связь между индивидуальными и усредненными характеристиками выбывания изделия в их совокупности. Полученные результаты позволили сформулировать методику определения параметра уязвимости.

**Ключевые слова:** жизненный цикл, вероятностная модель, уязвимость, выбывание изделия, качество, формула Байеса, теорема Байеса, системная инженерия, плотность распределения, случайная величина, жизненный цикл изделия, модель жизненного цикла.

### Эффект “селекции” для построения вероятностной модели жизненного цикла

Вероятностная модель жизненного цикла изделия позволяет определить динамику состояния продукта. Для оценки можно применить агрегированную модель совокупности, которая учитывает выход изделия из строя [1].

Сущность процесса выбывания определяется тем, что при неизменности во времени свойств изделия в их совокупности проявляется эффект “селекции”, который ведет к тому, что менее надежное оборудование будет выбывать в первую очередь.

Примем, что каждое изделие находится в определенном состоянии, пребывание в котором носит вероятностный характер. Считается, что вероятность длительности  $T$  пребывания изделия в выделенном состоянии зависит от ряда характеристик, имеющих разные значения для изделий, входящих в совокупность.

Пусть есть только один латентный параметр  $z$ , а все остальные доступны наблюдению, формируя вектор  $x$ . В этом случае плотность

вероятности длительности  $T$  запишем в форме  $F(t|z, x)$ , придавая ей смысл условной вероятности [2]. Степень неоднородности, изучаемой совокупности однотипных изделий, определяется долей изделий, характеризующихся конкретными значениями  $z$  в совокупности, и может быть описана функцией распределения параметра  $z - \Phi(z)$ .

При вероятностной интерпретации величина  $\Phi(z^*)$  имеет смысл вероятности того, что произвольно взятое каждое изделие имеет значение параметра неоднородности, меньшее  $z^*$ .

Плотность распределения длительности пребывания изделия в состоянии  $G(t, x)$  отличается от  $F(t|z, x)$ , так как наблюдения осуществляется над изделиями, которым соответствуют разнообразные смыслы параметра неоднородности  $z$ , а плотность  $G(t, x)$  является результатом агрегирования условной плотности  $F(t|z, x)$  по функции распределения  $\Phi(z)$ , т.е.

$$G(t, x) = \int F(t|z, x) d\Phi(z), \quad (1)$$

Если функция распределения  $\Phi(z)$  дифференцируема, то:

$$G(t, x) = \int F(t|z, x) \varphi(z) dz, \quad (2)$$

где  $\varphi(z) = d\Phi(z)/dz$  – плотность вероятности распределения уязвимости.

При решении уравнения (1) необходимо учесть, что плотность вероятности длительности нахождения в состоянии  $G(t, x)$  неизвестна, но имеется выборка полученных значений  $T = (t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$  длительностей пребывания в  $i$ -ом состоянии  $N$  изделий.

Задача идентификации модели продолжительности события будет сводиться к оценке по выборке  $T$  неизвестных параметров условной плотности  $F(t|z, x)$  и функции распределения неоднородности  $\Phi(z)$ , которые удовлетворяют уравнению (1) [3].

## Связи между индивидуальными и усреднёнными характеристиками выбывания изделия

Для выражения (1) определим условную плотность  $F(t|z, x)$ , установив связи между индивидуальными  $\mu$  и средними  $\bar{\mu}$  характеристиками выбывания. Совместное распределение пары  $(T, z)$  определяет статистические характеристики совокупности. Чем больше  $z$ , тем больше интенсивность  $\mu$  выбытия изделия в группе. Совокупность может описываться как функциями  $\bar{\mu}(t)$  или  $\bar{S}(t)$ , так и функциями  $\mu(t|z)$  или  $S(t|z)$  (с распределением  $\Phi(z)$ ). Что определяется уровнем информированности исследователя и целей исследований, свойство однородности совокупности изделия проявляется лишь на отдельном агрегированном уровне.

Для получения связи между агрегированными и дезагрегированными функциями необходимо проинтегрировать соответствующие дезагрегированные характеристики с функцией распределения  $\Phi(z)$ . Если функция распределения  $\Phi(z)$  абсолютно непрерывна с плотностью  $\varphi(z)$ , то для функции сохранения  $S(t)$  получаем

$$\bar{S}(t) = \int_0^{\infty} S(t|z)\varphi(z)dz$$

Связи между уровнем интенсивности выбывания изделия  $\bar{\mu}(t)$  и  $\mu(t, z)$  можно вычислить используя условное усреднение  $\bar{\mu}(t) = \int_0^{\infty} \mu(t, z)\varphi(z|t \geq t_i)dz$ . Данный параметр является усреднением условной интенсивности выбытия изделий по параметрам уязвимости, сохранившихся до момента времени  $t_i$  [4].

Если изделия слабые и ненадежные, соответствуют большим значениям  $z$ , выбывая в первую очередь. Совокупность, которая состоит из сохранившихся изделий, характеризуется значениями выбытия, более

близкими к наиболее надежным элементам совокупности. Выбытие "слабых" устройств из совокупности ведет к изменению уровня наклона кривой выбытия  $\bar{\mu}(t)$ . Отметим, что данный наклон меньше, чем у отдельных групп или изделий [5].

Это позволяет сделать вывод, что в неоднородных совокупностях выбытие отдельных устройств выполняется быстрее. Если уязвимость  $Z$  для каждого отдельно взятого изделия не меняется со временем, то средняя уязвимость уменьшается в результате процесса селекции.

Для обоснования положения проведем анализ функции  $\mu(t, z)$  для пропорционального выбытия, представленной линейной зависимостью  $\mu(t, z) = z\mu(t)$ . Для определения функции выбытия  $\mu(t, z)$  рассмотрим функцию преодоления уровня  $x_0$   $\Pi(x_0) = P(x > x_0)$ . Если  $Q(x)$  – функция распределения случайной величины  $X$ , то  $\Pi(x_0) = 1 - Q(x_0)$ .

### Интенсивность выбывания элементов из совокупности

Имеет абсолютно непрерывную функцию распределения  $Q(x)$ , обозначив через  $q(x)$  соответствующую плотность распределения случайной величины. Интенсивность выбывания элементов с распределением  $q(x)$  будет функцией  $\mu(x, x_0)$ , которая характеризует совместную плотность вероятности  $x$  при условии его выхода за заданный предел  $x_0$  и определяется выражением (теорема Байеса) [3, 6]

$$\mu(x, x_0) = [q(x)q(x > x_0 | x)] / [\int_0^{\infty} q(x)q(x > x_0 | x)dx],$$

где  $q(x > x_0 | x)$  представляет собой функцию – индикатор множества  $x > x_0$ .

$$\int_0^{\infty} q(x)q(x > x_0 | x)dx = q(x > x_0) \int_{x_0}^{\infty} q(x)dx, \mu(x, x_0) = q(x) / [\int_{x_0}^{\infty} q(x)dx].$$

$$\Pi(x_0) = \exp\left[-\int_{x_0}^{\infty} \mu(x, x_0)dx\right].$$

Пусть  $\varphi(z)$  является плотностью распределения фактора уязвимости в начальный момент в неоднородной совокупности изделий. Тогда  $A(t) = \int_0^t \mu(s) ds$  - интегральная интенсивность выбытия для изделия из "обычной" совокупности. По формуле Байеса для условной плотности распределения  $\varphi(z | T > t)$ :

$$\varphi(z | T > t) = \varphi(z) \exp[-zA(t)] / \int_0^{\infty} \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz$$

$$M^*(z(t)) = \int_0^{\infty} z \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz / \int_0^{\infty} \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz .$$

Дифференцирование  $M^*(z(t))$  по  $t$  дает

$$\begin{aligned} dM^*(z(t))/dt = & - \int_0^{\infty} z^2 \mu(t) \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz / \int_0^{\infty} \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz + \\ & + \int_0^{\infty} z \mu(t) \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz \int_0^{\infty} z \mu(t) \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz / \left[ \int_0^{\infty} \varphi(z) \exp[-zA(t)] dz \right]^2 . \end{aligned}$$

После преобразований получаем

$$d\bar{z}(t)/dt = -R_t \mu(t) , \quad (3)$$

где  $R_t = E\{(z - \bar{z}(t))^2 | t > t_i\}$  - условный риск выбора оценки  $\bar{z}$  для латентного параметра  $Z$ , являющегося неотрицательной функцией времени  $t$ . Производная по времени функции  $\bar{z}(t)$  отрицательна. Средняя уязвимость в совокупности  $z(t)$  убывает со временем. Так как  $\bar{z}(t)$  убывает, то из соотношения  $\bar{\mu}(t) = \bar{z}(t) \mu(t)$  следует, что интенсивность выбытия  $\mu(t)$  растет быстрее, чем наблюдаемая интенсивность выбытия  $\bar{\mu}(t)$ , т.е. изделия в неоднородной совокупности выбывают быстрее, чем каждое изделие в однородной совокупности изделий с теми же характеристиками выбытия.

Используя выражение (3) можно получить общее количество выбывших из совокупности изделий  $N_i$  устройств в результате селекции

$$- \int_0^{t_i} d\bar{z}(t) / R_t = \int_0^{t_i} \mu(t) dt = N_i , \quad (4)$$

Данное выражение позволяет по выборке  $n = (N_1, \dots, N_i, \dots, N_m)$  выбывшего изделия за интервалы времени образующих выборку  $T=(t_1, \dots, t_i, \dots, t_n)$  длительностей пребывания в  $i$ -том состоянии  $n$  изделий определить при заданном риске  $R_i$  оценку уязвимости в совокупности изделий.

Для определения качества оценки уязвимости изделий целесообразно использовать средний риск [5]. Для определения среднего риска принятия по результатам измерений  $x_0^i$  оценки  $\bar{z}$  вместо истинного значения  $Z$  используют функцию потерь  $C(z, \bar{z}(x_0^i))$ . Усредненная по множеству  $\Omega_z$  результатов измерения  $x_0^i$  (с условной плотностью распределения вероятностей  $p(x_0^i|z)$ ) функция потерь и определяет средний риск [7]:

$$R(Z, \bar{Z}) = \int_{\Omega_z} C(z, \bar{z}(x_0^i)) p(x_0^i|z) dx_0^i.$$

Величина риска выбытия имеет вид:

$$R_i = \int_0^{\infty} (z - \bar{z})^2 \varphi(z|t \geq t_i) dz = - \frac{d\bar{z}(t)/dt}{\mu}.$$

### Алгоритм решения задачи идентификации модели

Сформулируем алгоритм решения задачи идентификации модели длительности события на основании экспериментальных исследований характеристик совокупности изделий, как задачу решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с ядром в виде условной плотности  $F(t|z) = dS(t|z)/dt$  [8]. Для решения задачи необходимо:

1. Решить интегральное уравнение (4). По выборке выбывших изделий  $N_b = (N - N_1, \dots, N - N_i, \dots, N - N_m)$  за интервалы времени образующих выборку  $T=(t_1, \dots, t_i, \dots, t_m)$  длительностей пребывания в  $i$ -том состоянии  $N$  изделий определяют параметр уязвимости  $\bar{z}_i$  при заданном качестве в виде условного среднего риска  $R_i$ .

2. С учетом полученного решения интегрального уравнения (4) составляют условную плотность  $F(t | \bar{z}, \mathbf{x})$  в виде совместно распределенных параметров пары  $(t_i, \bar{z}_i)$ , которая описывает статистические свойства.

3. Определить плотность вероятности распределения параметра неоднородности, как решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2) с ядром в виде условной плотности  $F(t | z, \mathbf{x})$  при заданной плотности вероятности пребывания изделия в заданном состоянии  $G(t, \mathbf{x})$  по выборке  $N_{\text{пр}} = (N_1, \dots, N_m)$ .

4. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода (2) позволит определить плотность вероятности распределения характеристики неоднородности  $i$ -ого изделия, что позволяет осуществить отбор по критерию  $z_i < z^*$ .

В данной задаче распределение случайной величины  $z$  может быть, как непрерывным, так и дискретным [9, 10]. В последнем случае значения величин  $z$  часто ассоциируются с принадлежностью устройств из совокупности к некоторой однородной группе, для которой характеристики выбытия соответствуют значению  $z$ . Если группа однородна и ей соответствует конкретное значение параметра  $z^*$ , то распределение  $\Phi(z)$  имеет вид ступенчатой функции, принимающей значение 0 при  $z < z^*$  и 1 при  $z \geq z^*$ , а совокупность определяется объединением соответствующих групп с различными характеристиками выбытия оборудования [11]. Функция сохранения:

$$\bar{S}(t) = \sum_i S(t | z_i) P_i,$$

где  $P_i$  – начальные пропорции оборудования в группе, в которой выбытие оборудования характеризуется величиной  $z$ . Чем более  $\Phi(z)$  отличается от ступенчатой функции, тем более совокупность неоднородна [12].

## Выводы

На базе проделанных исследований, можно сделать следующие выводы:

1. В неоднородных совокупностях выбытие происходит быстрее.
2. Если уязвимость  $z$  для отдельно взятого объекта не изменяется со временем, то средняя уязвимость убывает в результате селекции.
3. При сравнении двух статистик  $\{V_n\}$  и  $\{T_n\}$  статистика, характеризующаяся большей скоростью изменения оценки более эффективная.
4. Сформулированная методика позволяет оценивать параметр уязвимости изделия, что позволяет синтезировать модель ЖЦ.

## Литература

1. Зараенских Е.П. Управление жизненным циклом информационных систем. Учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Издательство Юрайт. – 2017. – 431 с.
  2. Панов М.П. Жизненный путь и цикл развития организации. Практическое пособие. – М.: Инфра-М. – 2016. – 98 с.
  3. Бром А.Е., Колобов А.А., Омельченко И.Н. Интегрированная логистическая поддержка жизненного цикла наукоемкой продукции. Учебник – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана – 2008. – 293 с.
  4. Фиговский О. Инновационный инжиниринг – путь к реализации оригинальных идей и прорывных технологий // Инженерный вестник Дона, 2014, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2321](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2321).
  5. Аксенов К. А. Коалиционная модель мультиагентного процесса преобразования ресурсов // Инженерный вестник Дона, 2012, №4 ч. 2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1437](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1437).
  6. Никулин, Д. Ю., Краснов, С.В. Логистическая поддержка проектных решений в промышленном производстве // Вестник Волжского университета
-



им. В.Н. Татищева. - № 2 (21). – 2013. – С.14-20.

7. Грибанов Д.Д. Экономическая эффективность метрологического обеспечения изделий на этапах их жизненного цикла. Учебное пособие – М. : Инфра-М, 2015. – 210 с.

8. Лазутин Ю.Д. Качество жизненного цикла промышленных изделий – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 320 с.

9. Ицхак Кальдерон Адизес. Управление жизненным циклом корпорации – СПб : Питер, 2015. – 512 с.

10. Губич Л., Ковалев М., Паткевич Н. Внедрение на промышленных предприятиях информационных технологий поддержки жизненного цикла продукции – Минск : Беларуская Навука, 2013. – 190 с.

11. Dale B.G. Managing Quality.–3-rd ed.– Blackwell Publishers, Oxford – 1999. 63 p.

12. Dickenson R.P., Campbell D.R. and Azarov V.N. Quality management implementation in Russia Strategies for change// International Journal of Quality & Reliability Management, №1.– 2000. – pp. 66-81.

### References

1. Zaraenskih E.P. Upravlenie zhiznennym ciklom informacionnyh sistem. Uchebnik i praktikum dlja akademicheskogo bakalavriata. [Management of life cycle of information systems]. M.: Izdatel'stvo Jurajt. 2017. 431 p.

2. Panov M.P. Zhiznennyj put' i cikl razvitija organizacii. Prakticheskoe posobie. [Course of life and cycle of development of the organization]. M.: Infra-M. 2016. 98 p.

3. Brom A.E., Kolobov A.A, Omel'chenko I.N. Integrirovannaja logisticheskaja podderzhka zhiznennogo cikla naukoemkoj produkcii. Uchebnik [The integrated logistic support of life cycle of the knowledge-intensive production]. M.: MGTU im. N.Je. Baumana. 2008. 293 p.



4. Figovskij O. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №1. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2321](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2321).
5. Aksenov K. A. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №4 ч. 2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1437](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1437).
6. Nikulin D.Ju., Krasnov S.V. Vestnik Volzhskogo universiteta im. V.N. Tatishheva. № 2 (21). 2013. pp. 14-20.
7. Griбанov D.D. Jekonomicheskaja jeffektivnost' metrologicheskogo obespechenija izdelij na jetapah ih zhiznennogo cikla. Uchebnoe posobie. [Economic efficiency of metrological support of products at stages of their life cycle]. M.: Infra M, 2015. 210 p.
8. Lazutin Ju.D. Kachestvo zhiznennogo cikla promyshlennyh izdelij. [Quality of life cycle of industrial products]. M. : MGTU im. N. Je. Baumana, 2017. 320 p.
9. Ichak Kal'deron Adizes. Upravlenie zhiznennym ciklom korporacii. [Management of life cycle of corporation]. SPb: Piter, 2015. 512 p.
10. Gubich L., Kovalev M., Patkevich N. Vnedrenie na promyshlennyh predpriyatijah informacionnyh tehnologij podderzhki zhiznennogo cikla produkcii. [Introduction at the industrial enterprises of information technologies of support of life cycle of production]. Minsk: Belaruskaja Navuka, 2013. 190 p.
11. Dale B.G. Managing Quality. 3rd ed. Blackwell Publishers, Oxford. 1999. 63 p.
12. Dickenson R.P., Campbell D.R. and Azarov V.N. International Journal of Quality & Reliability Management, 17. №1. 2000. pp. 66-81.