

Оценка точности прямых методов интегрирования уравнений движения

Л.Н. Панасюк, В.А. Думбай, А.К. Морозова, Д.Р. Ливинский

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В статье рассматриваются наиболее распространенные в инженерной практике схемы прямого интегрирования уравнений движения, приводятся основные формулы. Выполнен анализ точности указанных методов на примере решения тестовой задачи.

Ключевые слова: динамика сооружений, строительная механика, прямые методы интегрирования уравнений движения, метод Ньюмарка, метод Хаболта, метод Вилсона.

Одним из актуальных направлений современной строительной механики является изучение нелинейных динамических моделей различных сооружений [1], для исследования поведения которых необходимо решать нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Решение подобных задач обусловлено необходимостью уточненных расчетов сооружений при воздействии на них нестационарных силовых и кинематических возмущений, вызывающих появление таких деформаций, при которых конструкцию следует рассматривать как существенно нелинейную. Примером подобных возмущений могут служить мощные ударные волны [2], сейсмическое воздействие, нестационарное температурное поле высокой интенсивности. Кроме того, внутренним свойством некоторых конструкций является возможность бурного роста перемещений отдельных узлов за короткий промежуток времени при статическом воздействии, и, как следствие, появление инерционных сил, сопоставимых по величине с внешней нагрузкой. Подобный эффект наблюдается, например, при общей потере устойчивости сооружения.

Для решения задачи динамики созданы специальные численные методы. Эти методы носят название прямых методов, так как при их использовании не производится никаких преобразований уравнений движения. Решение с использованием этих методов ведется по шагам,

поэтому они носят также название шаговых методов [3]. Эти методы могут быть эффективно использованы при расчете конструкций по методу конечных элементов (далее МКЭ). По существу, на каждом шаге решается статическая задача, но в соответствии с принципом Даламбера, к статическим силам добавляются силы инерции и силы сопротивлений. Прямые методы интегрирования уравнений движения можно классифицировать по следующим признакам:

- явные и неявные схемы (на каждом шаге по времени проводится решение системы линейных уравнений),
- устойчивые (абсолютно и условно) и неустойчивые.

Применение неустойчивых схем приводит к резкому увеличению параметров напряженно-деформируемого состояния рассчитываемой конструкции, и через некоторое число шагов по времени могут быть получены неприемлемые результаты [4,5].

В условно-устойчивых схемах устойчивость зависит от величины шага интегрирования по времени, который не должен превышать определенную долю периода высшей формы колебаний мгновенно-линейной системы. При применении абсолютно устойчивых схем величина шага по времени может существенно превышать шаг условно устойчивых схем. В настоящее время неизвестны абсолютно устойчивые явные схемы интегрирования уравнений движения, поэтому применение известных явных схем (например, метод центральных разностей) целесообразно только при исследовании высших форм колебаний [6].

В настоящее время наиболее известными схемами прямого интегрирования уравнений движения являются: метод Вилсона, метод Ньюмарка, метод Хоболта [7-10].

По методу Хоболта рассматриваются условия равновесия для конца интервала $t + \Delta t$ [11,12]:

$$M\ddot{q}_{t+\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Delta t} + Kq_{t+\Delta t} = Q_{t+\Delta t}, \quad (1)$$

Метод Вилсона основан на предположении о линейном изменении ускорения в интервале $t, t+\Theta\Delta t$, где $\Theta \geq 0$. Для получения решения рассматривается уравнение [12]:

$$M\ddot{q}_{t+\Theta\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Theta\Delta t} + Kq_{t+\Theta\Delta t} = \ddot{Q}_{t+\Theta\Delta t} = Q + \theta(Q_{t+\Delta t} - Q_t), \quad (2)$$

Метод Ньюмарка также основан на предположении о линейном изменении ускорения. Для получения решения рассматривается уравнение [11]:

$$M\ddot{q}_{t+\Delta t} + C\dot{q}_{t+\Delta t} + Kq_{t+\Delta t} = Q_{t+\Delta t}, \quad (3)$$

В приведённых уравнениях (1), (2) и (3): M – матрица масс, K – матрица жесткости, C – матрица демпфирования, Q – вектор внешних сил, q – вектор перемещений, \dot{q} – вектор скорости, \ddot{q} – вектор ускорения.

Далее рассмотрим точность различных схем прямого интегрирования.

В качестве тестовой задачи рассмотрим решение уравнения

$$\ddot{x} + x = 0$$

Точным решением будет уравнение

$$x = A \cos(t + \varphi).$$

при $t=0$ $x_0=1$, $\dot{x}_0=0$.

Анализ точности метода Ньюмарка

Для решения по схеме Ньюмарка матрица масс будет иметь вид $m=\pi/2$, матрица жесткость будет иметь вид $k=1$.

Способ аппроксимации производной функции через её значения в дискретных точках по методу Ньюмарка имеет следующий вид:

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + [(1 - \delta)\ddot{x}_t + \delta\ddot{x}_{t+\Delta t}]\Delta t$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_t + \alpha \ddot{x}_t + \alpha \ddot{x}_{t+\Delta t} \right] (\Delta t)^2$$

В качестве безусловно стабильного решения принимается $\delta=1/2$ и $\alpha=1/3$.

Шаг интегрирования примем различным в долях от периода:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{n},$$

Рассмотрим решения с количеством шагов $n=50, 100, 200$:

а) при $n=50$ график решения методом Ньюмарка показан на рис. 1. выберем три точки в окрестности минимума полученной функции.

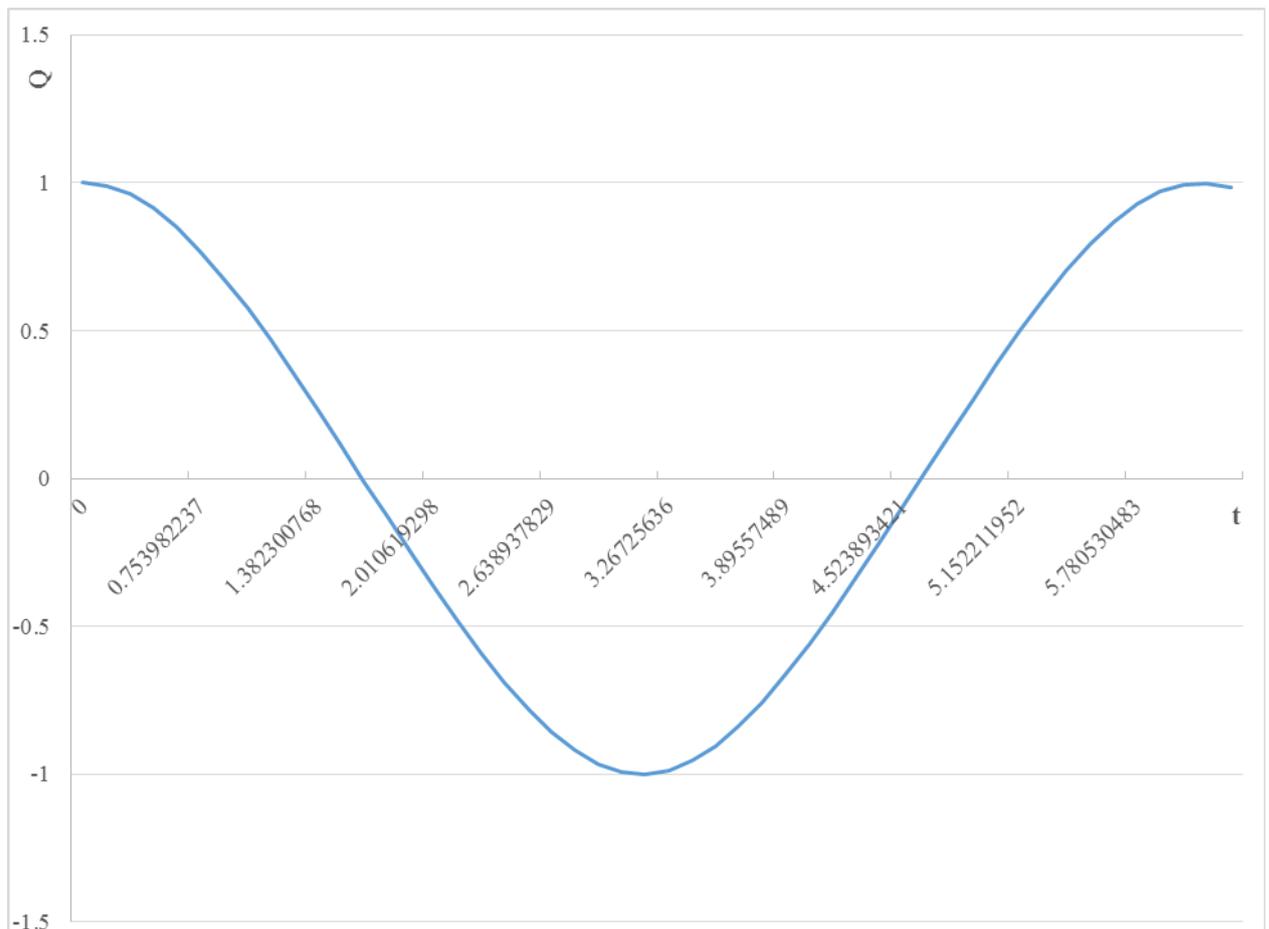


Рис. 1. – График решения методом Ньюмарка при $n=50$

Построим через полученные точки параболу $at^2 + bt + c = 0$.

Параметры a , b и c найдем по известным значениям функции в точках 0 , $+\Delta t$, $-\Delta t$:

при $t=0$

$$c = -0.9995;$$

при $t=+\Delta t$

$$a * 0.015791^2 + b * 0.12566371 + (-0.9995) = -0.9868;$$

при $t=-\Delta t$

$$a * 0.015791^2 + b * (-0.12566371) + (-0.9995) = -0.9923.$$

Откуда получим $a=0.630091$, $b=0.021884$.

Найдем точку экстремума функции $at^2 + bt + c = 0$:

$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -0.017366;$$

Значение функции в этой точке составит -0.99969 .

Таким образом, погрешность решения составит:

$$\Delta A_{50} = \frac{1-0.99969}{1} * 100\% = 0.031\%,$$

$$\Delta T_{50} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.552764\%.$$

б) при $n=100$ график решения методом Ньюмарка показан на рис. 2. Выберем три точки в окрестности минимума полученной функции.

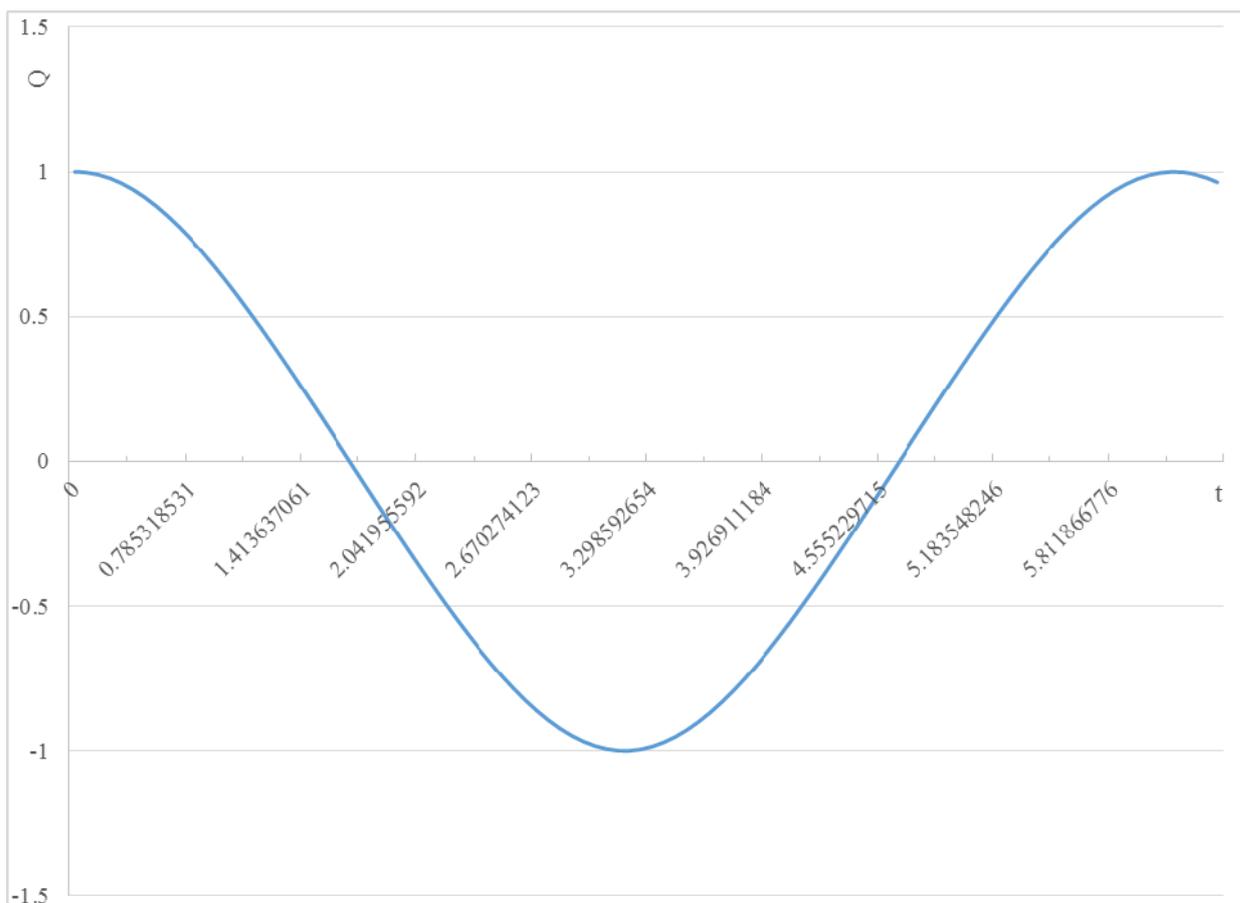


Рис. 2. – График решения методом Ньюмарка при n=100

Аналогично с предыдущим шагом, решим уравнения для параболы и получим погрешность решения:

$$\Delta A_{100} = \frac{1 - 1.000012}{1} * 100\% = 0.012\%,$$

$$\Delta T_{100} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.8039\%.$$

в) при n=200 график решения методом Ньюмарка показан на рис. 3. Выберем три точки в окрестности минимума полученной функции.

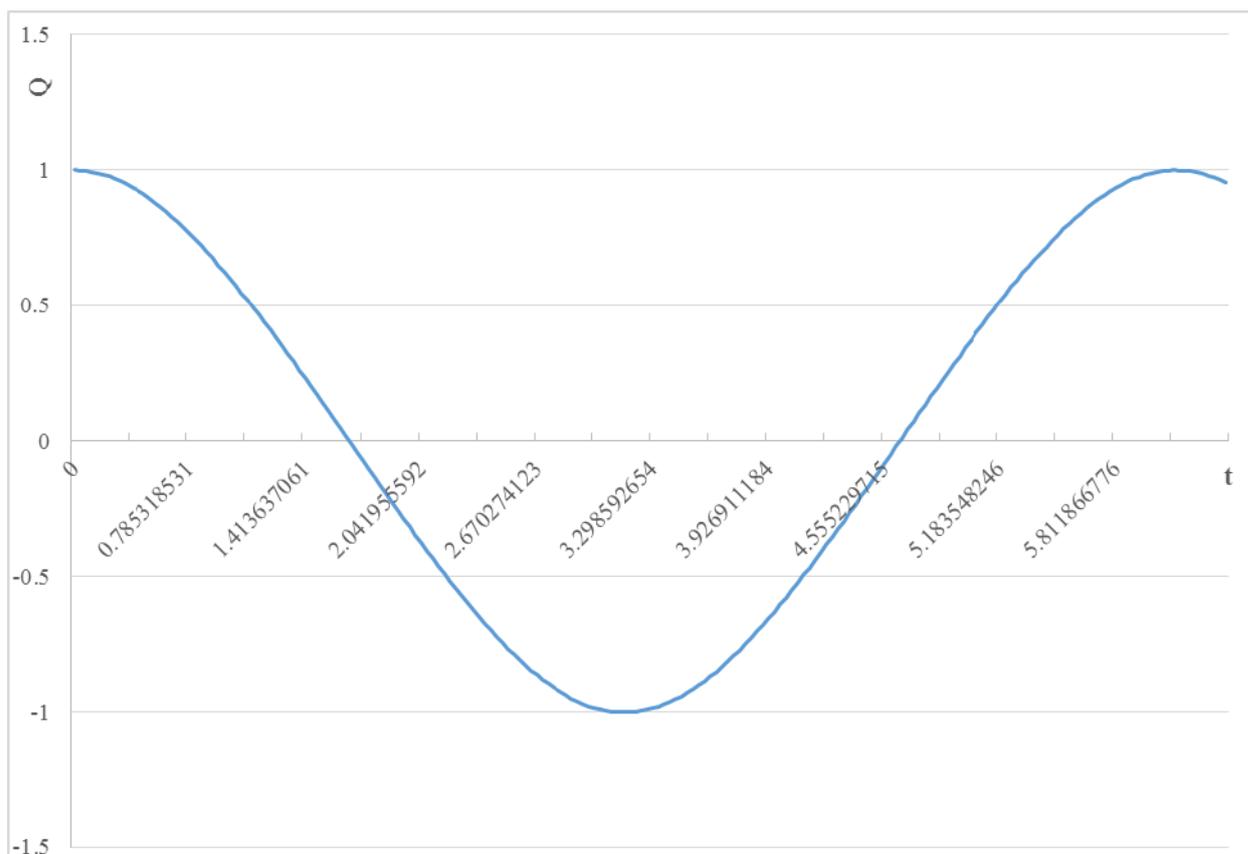


Рис. 3. – График решения методом Ньюмарка при $n=200$

Погрешность решения при составит:

$$\Delta A_{200} = \frac{1 - 1.0000004}{1} * 100\% = 0.000865\%,$$

$$\Delta T_{200} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.1154\%.$$

Результаты сведены в таблицу №1.

Таблица №1

Результаты оценки точности метода Ньюмарка

n	$\Delta A_n, \%$	$\Delta T_n, \%$
50	0,031	0,5527
100	0,012	0,8039
200	0,000865	0,1154

Анализ точности метода Хоболта

Способ аппроксимации производной функции через её значения в дискретных точках по методу Хоболта имеет следующий вид [12]:

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6\Delta t} (11x_{t+\Delta t} - 18x_t + 9x_{t-\Delta t} - 2x_{t-2\Delta t}),$$

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (2x_{t+\Delta t} - 5x_t + 4x_{t-\Delta t} - x_{t-2\Delta t}).$$

Шаг интегрирования примем как и в предыдущем параграфе, различным в долях от периода $\Delta t = \frac{2\pi}{n}$.

Рассмотрим решения с количеством шагов $n=50, 100, 200$:

а) при $n=50$ график решения методом Хоболта показан на рис. 4.

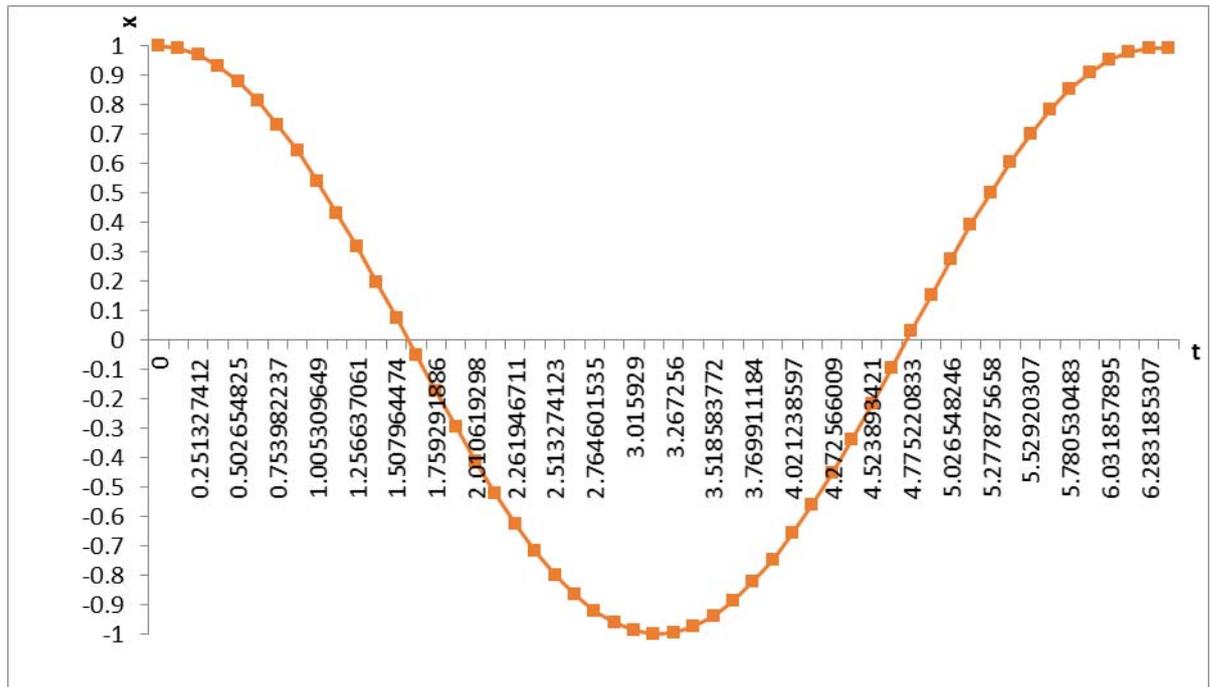


Рис. 4. – График решения методом Хоболта при n=50

Погрешность решения составит:

$$\Delta A_{50} = \frac{1 - 0.99725127}{1} * 100\% = 0.275\%,$$

$$\Delta T_{50} = \frac{t_0}{n} * 100\% = 0.67798\%.$$

б) при n=100 график решения методом Хоболта показан на рис. 5.

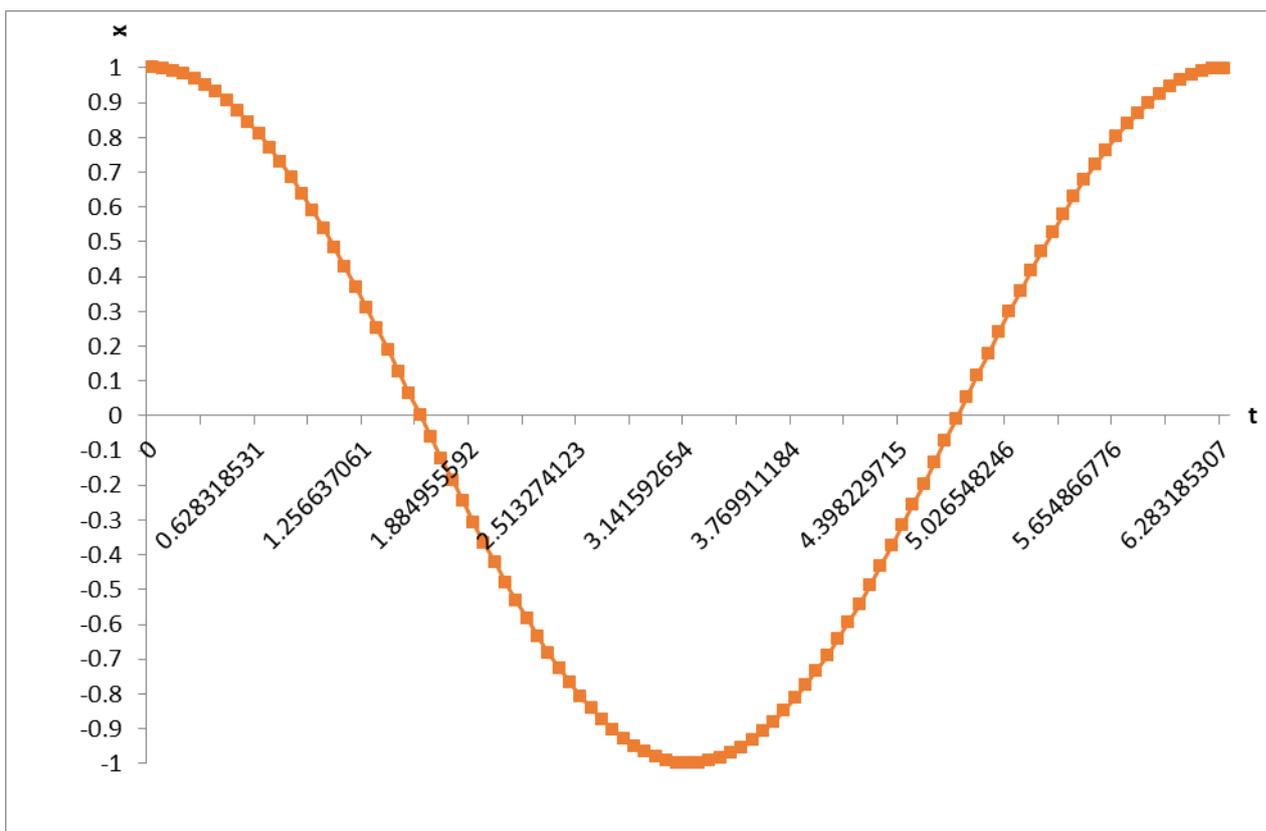


Рис. 5. – График решения методом Хоболта при $n=100$

Погрешность решения составит:

$$\Delta A_{100} = \frac{1 - 0.999629613}{1} * 100\% = 0.037\%,$$

$$\Delta T_{100} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.1761\%.$$

в) при $n=200$ график решения методом Хоболта показан на рис. 6.

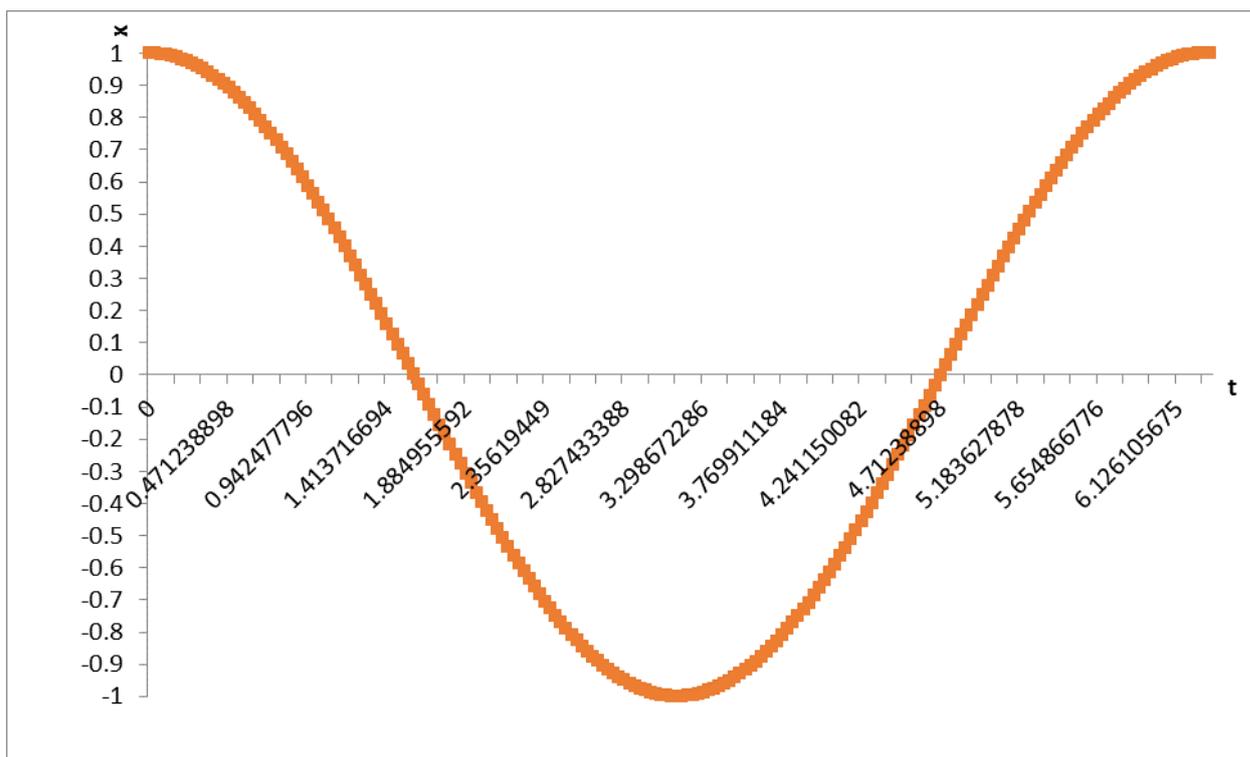


Рис. 6. – График решения методом Халбута при n=200

Погрешность решения при составит:

$$\Delta A_{200} = \frac{1 - 0.9999952352}{1} * 100\% = 0.00476\%,$$

$$\Delta T_{200} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.0447\%.$$

Результаты представлены в таблице №2.

Таблица №2

Результаты оценки точности метода Халбута

n	$\Delta A_n, \%$	$\Delta T_n, \%$
50	0,275	0,67798
100	0,037	0,1761
200	0,00476	0,0447

Анализ точности метода Θ -Вилсона

Метод основан на предположении о линейном изменении ускорения в интервале от t до $t + \Theta \Delta t$, $\Theta \geq 1$. Зависимости $\dot{x}_{t+\Delta t}$ и $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ по методу Θ -Вилсона имеют вид [12]:

$$\dot{x}_{t+\Theta \Delta t} = \frac{3}{\Theta \Delta t} (x_{t+\Theta \Delta t} - x_t) - 2\dot{x}_t - \frac{\Theta \Delta t}{2} \ddot{x}_t$$
$$\ddot{x}_{t+\Theta \Delta t} = \frac{6}{(\Theta \Delta t)^2} (x_{t+\Theta \Delta t} - x_t) - \frac{6}{\Theta \Delta t} \dot{x}_t - 2\ddot{x}_t$$

Значение параметра Θ принято 1,37 из условия численной устойчивости решения.

Шаг интегрирования примем как и предыдущем параграфе, различным в долях от периода:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{n}$$

Рассмотрим решения с количеством шагов $n=50, 100, 200$:

а) при $n=50$ график решения методом Θ -Вилсона показан на рис. 7.

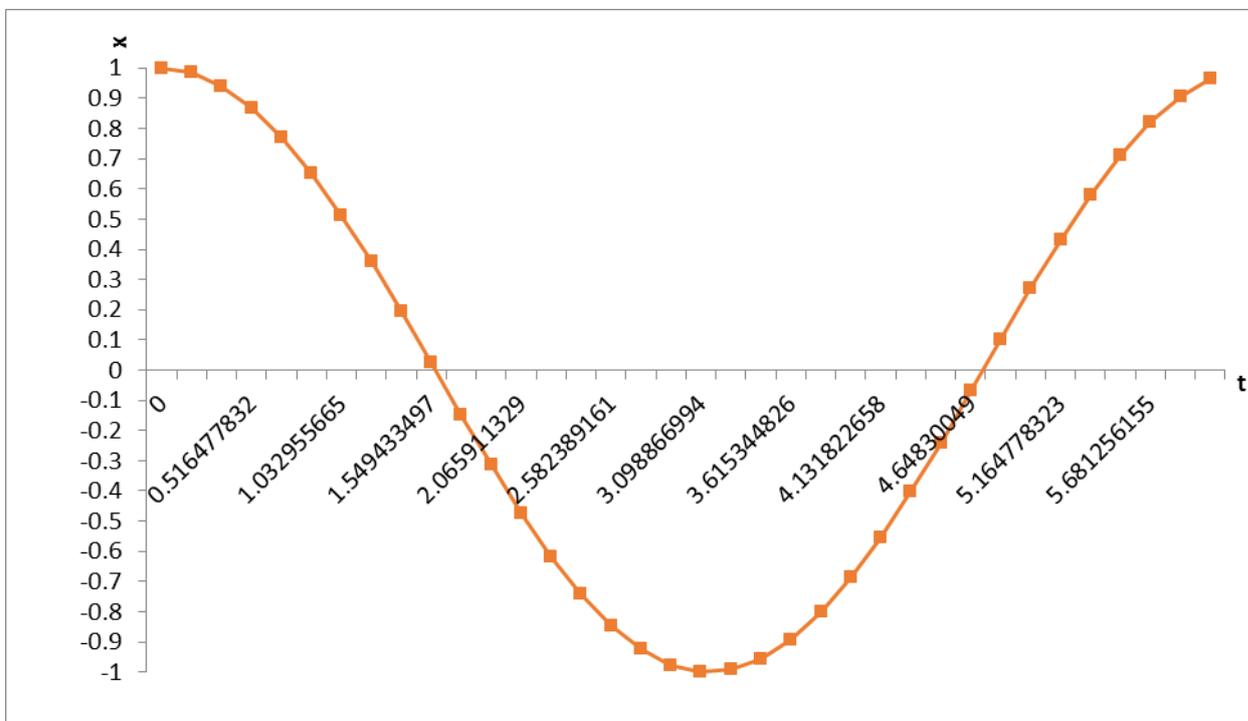


Рис. 7. – График решения методом Θ -Вилсона при $n=50$

Погрешность решения при составит:

$$\Delta A_{50} = \frac{1 - 0.999992599}{1} * 100\% = 0.00074\%,$$

$$\Delta T_{50} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 1.0808\%.$$

б) при n=100 график решения методом Θ -Вилсона показан на рис. 8.

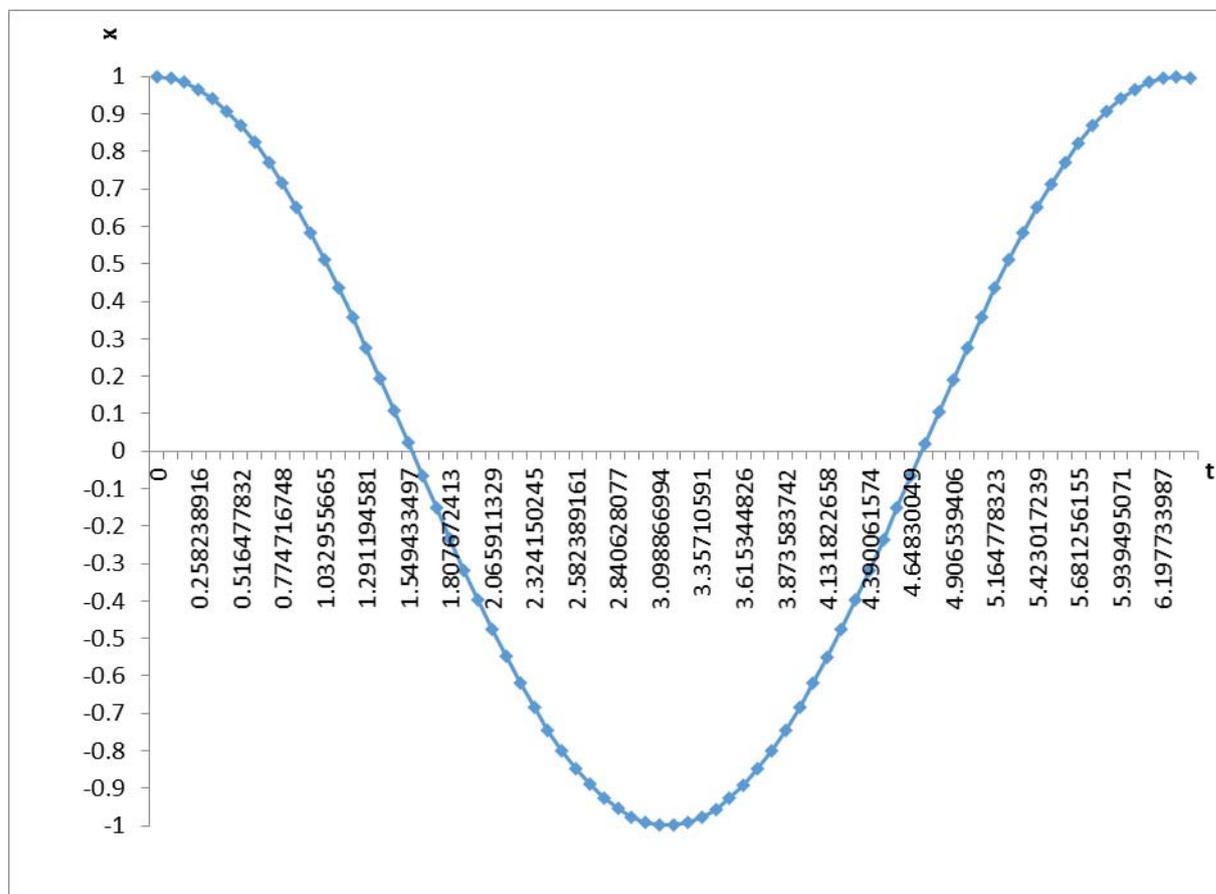


Рис. 8. – График решения методом Θ -Вилсона при n=100

Погрешность решения при составит:

$$\Delta A_{100} = \frac{1 - 0.999998742}{1} * 100\% = 0.000126\%,$$

$$\Delta T_{100} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.98476\%.$$

в) при n=200 график решения методом Θ -Вилсона показан на рис. 9.

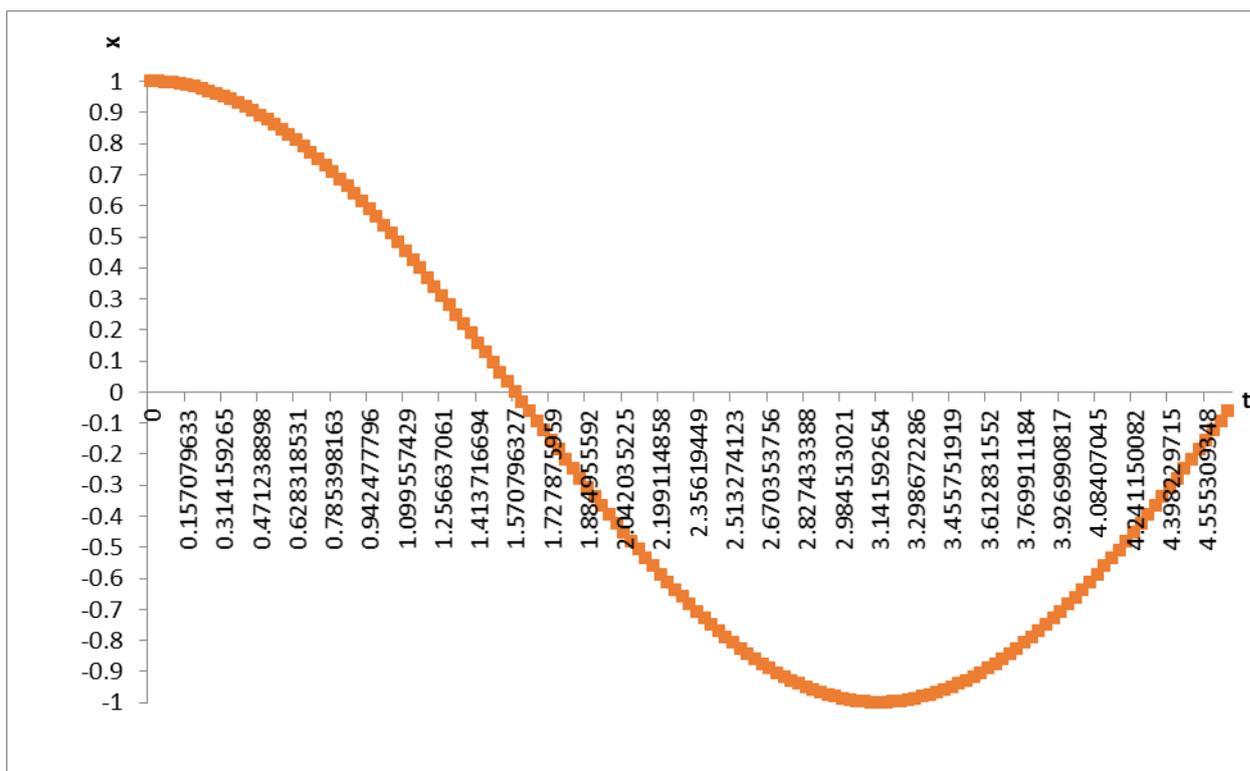


Рис. 9. – График решения методом Θ -Вилсона при $n=200$

Погрешность решения составит:

$$\Delta A_{200} = \frac{1-1}{1} * 100\% = 0.0000000012\%,$$

$$\Delta T_{200} = \frac{t_0}{\pi} * 100\% = 0.001666\%.$$

Результаты сведены в таблицу №3.

Таблица №3

Результаты оценки точности метода Θ -Вилсона

n	$\Delta A_n, \%$	$\Delta T_n, \%$
50	0,00074	1,0808
100	0,000126	0,98476
200	0,000	0,001666

Сводные данные по оценке точности различных схем прямого интегрирования

Результаты представлены в таблице №4.

Таблица №4

Сводные результаты оценки точности

Кол-во шагов интегрирования	Погрешности	Метод		
		Ньюмарка	Хаболта	Θ-Вилсона
N=50	$\Delta T_n, \%$	0,5527	0,67798	1,0808
	$\Delta A_n, \%$	0,031	0,275	0,00074
N=100	$\Delta T_n, \%$	0,8039	0,1761	0,98476
	$\Delta A_n, \%$	0,012	0,037	0,000126
N=200	$\Delta T_n, \%$	0,1154	0,0447	0,001666
	$\Delta A_n, \%$	0,000865	0,00476	0,000

На рис. 10-12 представлены сводные графики оценки точности методов.

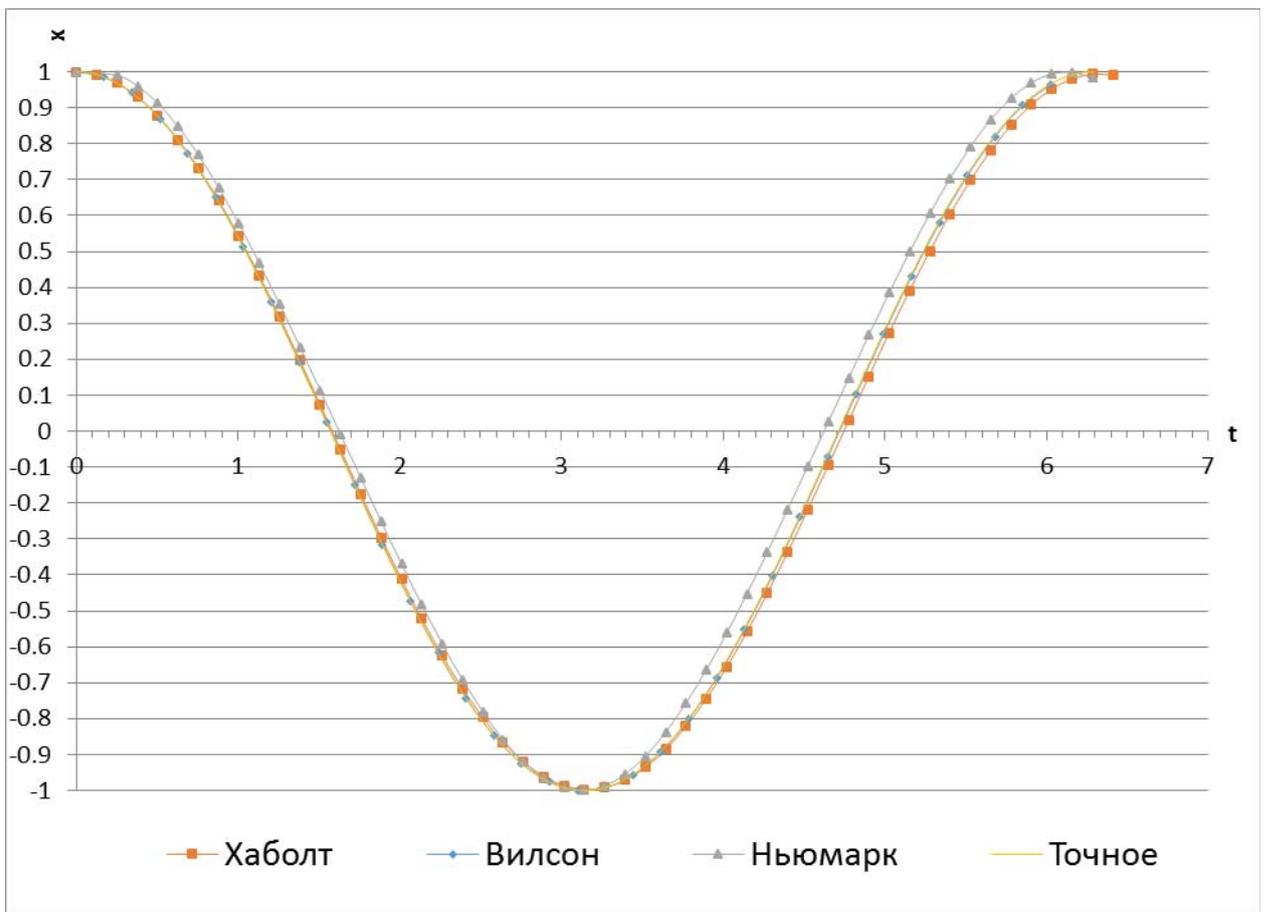


Рис. 10. – Сводный график при $N=50$

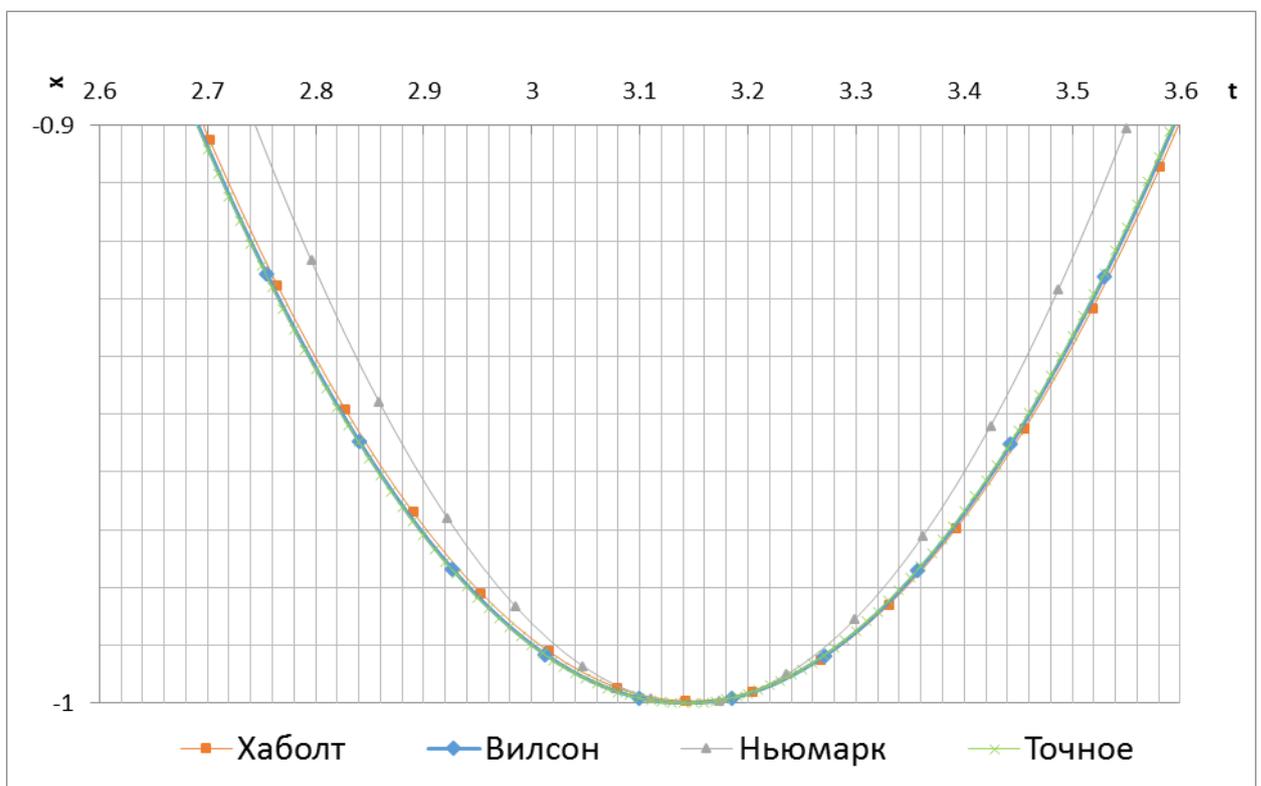


Рис. 11. – Сводный график при N=100

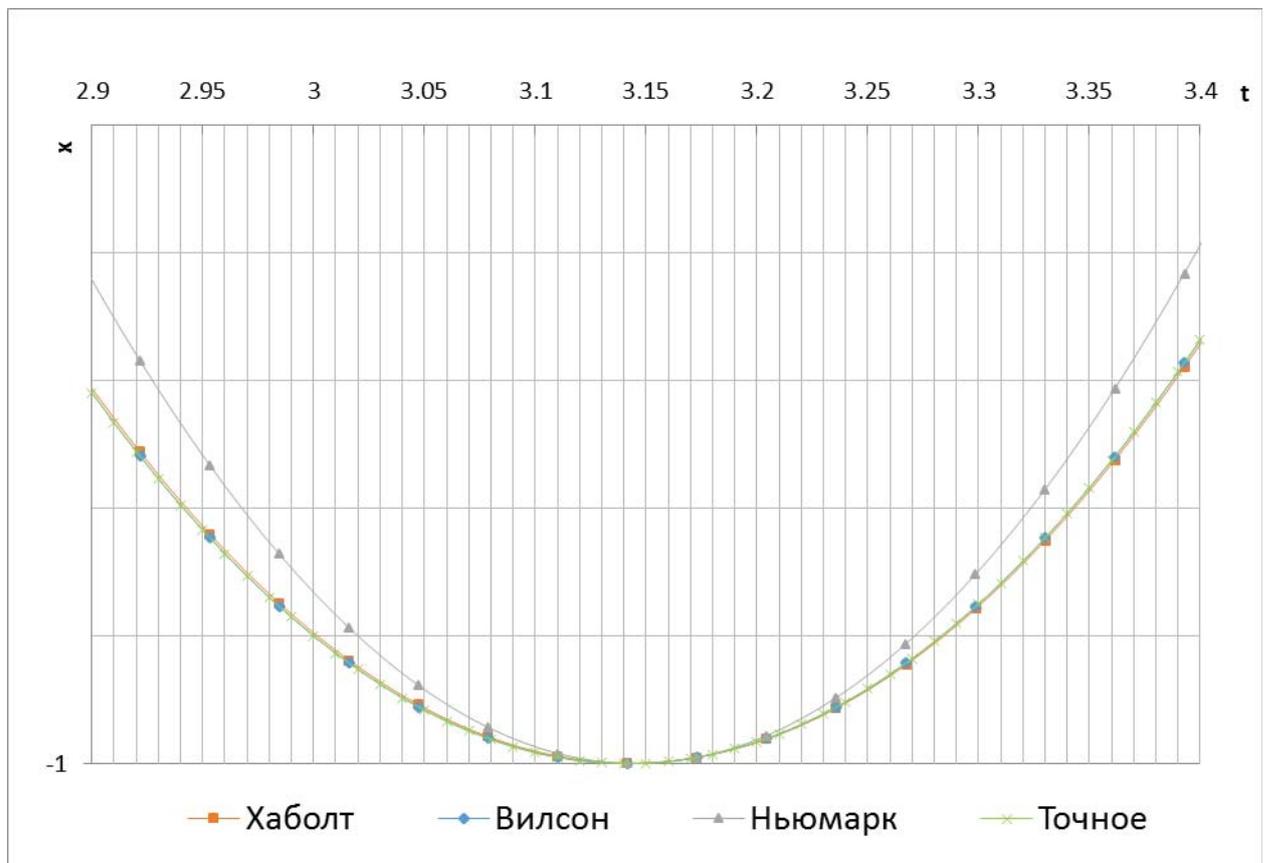


Рис. 12. – Сводный график при N=200

Литература

1. Смирнов А.Ф. Строительная механика динамика и устойчивость сооружений. -М.: Стройиздат, 1984.С.415.
2. Зотова Е. В., Панасюк Л. Н. Численное моделирование динамических систем с большим числом степеней свободы на импульсные воздействия // Инженерный вестник Дона, 2012, №3. URL: ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/933
3. Панасюк Л.Н, Савельева Н.А, Тюрина В.С., Сазонова А.В. Преимущества шагового метода определения предельных нагрузок в стержневых системах // Инженерный вестник Дона, 2019, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2019/5819
4. Савельев Л.М. Прямое интегрирование уравнений движения в методе конечных элементов // Прочность и долговечность конструкций летательных аппаратов. - Куйбышев, 1984.С.37-44.
5. Розин Л.А. Автоматизация алгоритма метода сил в строительной механике // Строительная механика и расчет сооружений, №4, 1979, С.21-26.
6. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. -М.: Мир 1977. С.504.
7. Stricklin J.A., Heisler W.E. Survey of solution procedures for Nonlinear Static and Dynamic Analysis // Int. Conf.Ven. Struct.Mech.Finite Elements.-Detroit, 1974. P.14.
8. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. - М.: Стройиздат, 1982.С.448.
9. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. -М.: Мир, 1986.С.318.

10. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. Computer & Structure, Inc. Berkeley. USA. 2003. 752 p.

11. Самарский А.А, Теория разностных схем. -М. Наука, 1983.С.656.

12. Секулович М. Метод конечных элементов/Пер. с серб. Ю.Н. Зуева; Под ред В.Ш. Барбакадзе. – Москва: Стройиздат 1993. С. 664.

References

1. Smirnov A.F. Stroitel'naya mekhanika dinamika i ustoychivost' sooruzheniy [Structural mechanics dynamics and stability of structures]. М.:Stroyizdat, 1984. P.415.

2. Zotova E. V., Panasyuk L. N. Inzenernyj vestnik Dona, 2012, №3. URL: [ivdon.ru/magazine/ archive/n3y2012/933/](http://ivdon.ru/magazine/archive/n3y2012/933/)

3. Panasyuk L. N., Saveleva N.A, Turina V.S., Sazonova A.V. Inzenernyj vestnik Dona (Rus), 2019, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2019/5819

4. Savel'ev L.M. Pryamoe integrirovaniye uravneniy dvizheniya v metode konechnykh elementov. Prochnost' i dolgovechnost' konstruktsiy letatel'nykh apparatov [Direct integration of equations of motion in the finite element method. Strength and durability of aircraft structures]. Kuybyshev, 1984. pp.37-44.

5. Rozin L.A. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy, №4, 1979, pp.21-26.

6. Mizokhata S. Teoriya uravneniy s chastnymi proizvodnymi. [Theory of partial differential equations]. М.: Mir 1977. p.504.

7. Stricklin J.A., Heisler W.E. Survey of solution procedures for Nonlinear Static and Dynamic Analisy. Int. Conf.Ven. Struct.Mech.Finite Elements. Detroit, 1974. P.14.



8. Bate K., Vilson E. Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov [Numerical analysis methods and the finite element method]. M.:Stroyizdat, 1982. P.448
9. Zenkevich O., Morgan K. Konechnyye elementy i approksimatsiya. [Finite Elements and Approximation]. M.:Mir, 1986. P.318
10. Clough R.W., Penzien J. Dynamics of Structures. Computer & Structure, Inc. Berkeley. USA. 2003. 752 p
11. Samarskiy A.A, Teoriya raznostnykh skhem. [Theory of difference schemes]. M.:Nauka, 1983. P.656
12. Sekulovich M. Metod konechnykh elementov [Finite element method] Per. s serb. Yu.N. Zueva; Pod red V.Sh. Barbakadze. Moskva: Stroyizdat 1993. P. 664.