Упругая устойчивость статически неопределимой стержневой конструкции многоугольной конфигурации

Д.А. Журавлев

Донской государственный технический университет

Аннотация: Излагаются основные положения расчета на устойчивость статически неопределимых систем регулярной структуры. Рассматривается плоскостная конструкция, имеющая внешний контур в форме правильного шестиугольника и находящаяся под действием узловых радиальных сил сжатия. Выполняется анализ устойчивости равновесного состояния стержневой конструкции и определяется полный спектр численных значений параметра неустойчивости системы.
Ключевые слова: стержневая конструкция, правильный шестиугольник, шарнирная система, характеристический полином, треугольная панель.

До сравнительно недавнего времени при изучении проблемы устойчивости упругих систем более или менее удовлетворительно разрешены лишь простейшие задачи и практически нетронутым остается круг вопросов, относящихся к устойчивости стержневых конструкций в целом, а не их отдельных конструктивных элементов [1,2]. В работе [3] отмечается, что статически неопределимые системы в силу возможного перераспределения усилий в стержнях в значительной мере избавлены от опасности выпучивания индивидуальных элементов и это явление в ряде случаев не оказывается решающим при оценке их несущей способности. При изучении проблемы упругой устойчивости пространственных ферм в форме оболочек вращения, являющихся, как правило, многократно статически неопределимыми системами, особенно эффективно применение энергетических методов [4,5].

Чтобы показать применимость теории Р. Мизеса к расчету на устойчивость статически неопределимых систем, рассмотрим шарнирную систему, представленную на рис. 1.

Плоскостная система в форме правильного шестиугольника подвергается действию трех пар самоуравновешенных сил P.

Пусть соотношение между площадями поперечных сечений стержней внутреннего и внешнего контуров шестиугольного кольца будет таково: $F_1 = \sqrt{3}F$. Другими словами, оно принимается в полном соответствии с соотношением $l_1 = \sqrt{3}l$.

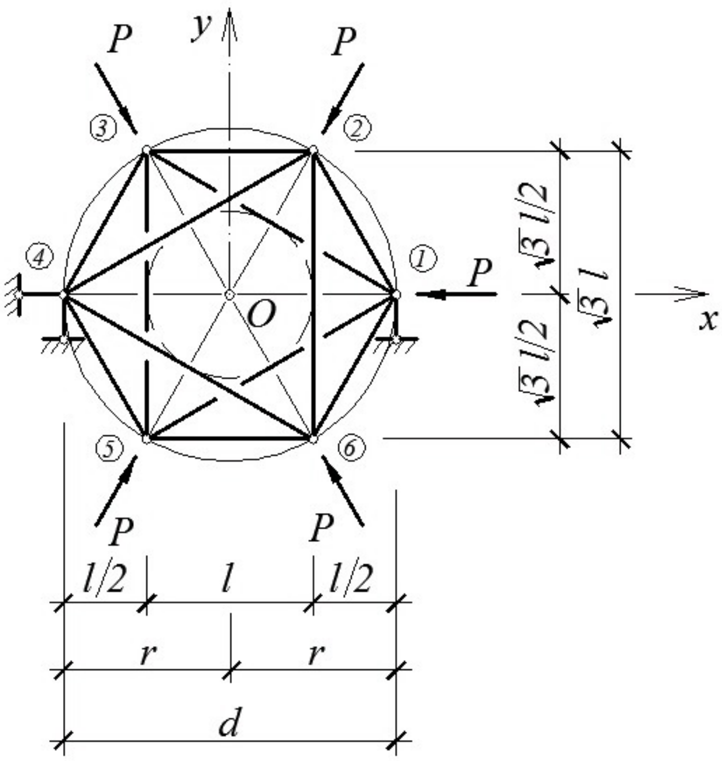

Рис. 1. Стержневая конструкция под действием радиальных сил

Для определения усилий в стержнях статически неопределимой системы примем за лишние неизвестные усилия X в элементах внешнего контура. Легко убедиться, что усилия сжатия в стержнях треугольных панелей получаются равными $\frac{\sqrt{3}}{3}(P - X)$.

Потенциальная энергия деформации, накопленная во всех элементах стержневой конструкции, будет:

$$U = 6\frac{X^2 l}{2EF} + 6\frac{l_1}{2EF_1}\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(P - X)\right]^2. \qquad (1)$$

Составляя производную $\frac{dU}{dX}$ и приравнивая ее нулю, найдем:

$$\frac{dU}{dX} = \frac{6l}{EF}\left[X - \frac{1}{3}(P - X)\right] = 0;\ X = \frac{P}{4}. \tag{2}$$

Заметим, что в стержневой конструкции в целом с внутренним контуром в виде двух треугольных панелей встречного направления имеет место однородное напряженное состояние. Это означает, что неустойчивость плоскостной системы оценивается единственным образом с помощью параметра $\lambda = \lambda_1$ [6].

Для произвольного узла k рассматриваемой плоскостной системы, в котором сходятся i стержней, уравнения равновесия в смещенном состоянии принимают вид [7]:

$$\sum_i \left\{\frac{EF}{l}\left[(\delta x_k - \delta x_i)\left(1 - \frac{l}{a}\sin^2\alpha\right) + (\delta y_k - \delta y_i)\frac{l}{a}\cos\alpha\cos\beta\right]\right\}_{ik} = 0, \tag{3}$$

$$\sum_i \left\{\frac{EF}{l}\left[(\delta x_k - \delta x_i)\frac{l}{a}\cos\alpha\cos\beta + (\delta y_k - \delta y_i)\left(1 - \frac{l}{a}\sin^2\beta\right)\right]\right\}_{ik} = 0. \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4), записываемые последовательно для всех узлов системы k=1,2…6, будут:

$$2(2-\lambda)\delta x_1 - \left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)(\delta x_2 + \delta x_6) - \left(1 - \frac{1}{4}\lambda\right)(\delta x_3 + \delta x_5) +$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda(\delta y_2 + \delta y_3 - \delta y_5 - \delta y_6) = 0, \tag{5}$$

$$-\left(1 - \frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_1 + 2(2-\lambda)\delta x_2 - \delta x_3 - (1-\lambda)\delta x_6 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_1 + 2(2-\lambda)\delta y_2 - (1-\lambda)\delta y_3 - \delta y_6 = 0, \tag{7}$$

$$-\left(1 - \frac{1}{4}\lambda\right)\delta x_1 - \delta x_2 + 2(2-\lambda)\delta x_3 - (1-\lambda)\delta x_5 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_1 - (1-\lambda)\delta y_2 + 2(2-\lambda)\delta y_3 - \delta y_5 = 0, \tag{9}$$

$$-\left(1-\frac{1}{4}\lambda\right)\delta x_1-(1-\lambda)\delta x_3+2(2-\lambda)\delta x_5-\delta x_6=0\,, \tag{10}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_1-\delta y_3+2(2-\lambda)\delta y_5-(1-\lambda)\delta y_6=0\,, \tag{11}$$

$$-\left(1-\frac{3}{4}\lambda\right)\delta x_1-(1-\lambda)\delta x_2-\delta x_5+2(2-\lambda)\delta x_6=0\,, \tag{12}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda\delta x_1-\delta y_2-(1-\lambda)\delta y_5+2(2-\lambda)\delta y_6=0\,. \tag{13}$$

Приравнивая детерминант этой системы уравнений нулю, получим характеристический полином девятого порядка относительно параметра неустойчивости λ, который запишется в виде [8]:

$$P_9(\lambda)=\lambda(\lambda-4)(\lambda-2)^4\left(\lambda-\frac{4}{3}\right)^3=0\,. \tag{14}$$

На основе выражения (14) заключаем, что в рассматриваемом случае имеют место кратные корни $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=2$; $\lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=4/3$. Что касается двух других корней полинома, то один из них $\lambda_8=4$, а $\lambda_9=0$.

Совершенно очевидно, что определяющим является результат $\lambda=4/3$, причем критическое значение радиальных сил будет равно:

$$P_{кр}=EF\,. \tag{15}$$

Как видим, полученное для стержневой конструкции многоугольной конфигурации значение критической нагрузки оказывается в шесть раз большим по сравнению с соответствующей величиной радиальной нагрузки для аналогичной по своей структуре статически определимой системы, когда в ней отсутствует любая из двух треугольных панелей внутреннего контура.

В заключение отметим, что к числу одних из самых первых работ, в которых указывается на прямую зависимость критического значения параметра неустойчивости от числа узлов статически определимой стержневой конструкции, следует прежде всего отнести работы [9,10].

Литература

1. Журавлев А.А., Журавлев Д.А. Стержневые конструкции цилиндрических оболочек. Ростов-на-Дону: ЗАО "Книга", 2014. 224 с.

2. Журавлев А.А. Устойчивость упругих стержневых систем в форме выпуклых многогранников // Строительная механика и расчет сооружений. 1985. №6. С. 42-48.

3. Mises R., Ratzerdorfer I. Die Knicksicherheit von Fachwerken. Z. für angewandte Math. und Mech. 1925. ss. 218-231.

4. Литвинов С.В., Языев Б.М. Энергетический метод в форме Тимошенко-Ритца для определения критических сил осевого сжатия круговой цилиндрической оболочки // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/722.

5. Тимофеев С.И. Численное решение нелинейной задачи устойчивости цилиндрических изотропных оболочек на основе динамического критерия // Инженерный вестник Дона, 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/720.

6. Журавлев А.А., Журавлев Д.А. Расчет устойчивости стержневой конструкции многогранной конфигурации // Изв. вузов. Строительство. 2017. №10(706). С. 5-13.

7. Рабинович И.М. Об устойчивости стержней в статически-неопределимых системах. М-Л. 1932. С. 36.

8. Штаерман И.Я., Пиковский А.А. Методы расчета конструкций на устойчивость. Киев. 1938. 207 с.

9. Shurawlow A., Stenker H. Zur von Raumstabkuppeln. Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 26 (1977). H.1. ss. 195-197.

10. Gutkowski W. Regularne konstrukcje pretowe, PWN, Warszawa, 1973, - 224 p.

References

1. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A. Sterzhnevye konstrukcii cilindricheskih obolochek [Rod constructions of cylindrical shells]. Rostov-na-Donu: ZAO "Kniga", 2014. 224 p.

2. Zhuravlev A.A. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 1985. №6. pp. 42-48.

3. Mises R., Ratzerdorfer I. Die Knicksicherheit von Fachwerken. Z. für angewandte Math. und Mech. 1925. ss. 218-231.

4. Litvinov S.V., Yazyev B.M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/722.

5. Timofeev S.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2012, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2012/720.

6. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A. Izv. vuzov. Stroitel'stvo. 2017. №10(706). pp. 5-13.

7. Rabinovich I.M. Ob ustojchivosti sterzhnej v staticheski-neopredelimyh sistemah [On the stability of rods in statically indefinable systems]. M-L. 1932. 36p.

8. Shtaerman I.Ya., Pikovskij A.A. Metody rascheta konstrukcij na ustojchivost' [Methods for calculating the stability of structures]. Kiev. 1938. 207 p.

9. Shurawlow A., Stenker H. Zur von Raumstabkuppeln. Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden 26 (1977). H.1. ss. 195-197.

10. Gutkowski W. Regularne konstrukcje pretowe, PWN, Warszawa, 1973, 224 p.