

Исследование геометрических параметров при аппроксимации криволинейных поверхностей

Е.А. Замятина

Ростовский государственный университет путей сообщения

Аннотация: В статье рассмотрен вопрос исследования отклонения геометрических параметров криволинейной поверхности и аппроксимирующей ее гранной поверхности. Аппроксимирующая поверхность строилась методом триангуляции. Очевидно, что при такой замене, геометрические параметры заданной криволинейной поверхности и аппроксимирующей ее поверхности будут отличаться. Для получения адекватных результатов необходимо, чтобы это отличие было минимальным. Одним из важнейших геометрических параметров поверхности является ее нормаль в заданной точке. В статье поставлена цель исследовать величину отклонений нормалей поверхностей в заданных точках и оценить возникающую при этом погрешность на примере решении задач отражения в геометрических моделях оптики и акустики. Проведенные исследования показали, что при данном способе аппроксимации получаются значительные отклонения нормалей и, в результате этого, значительные отклонения отраженных лучей. Таким образом, метод триангуляции мало пригоден в задачах такого рода.

Ключевые слова: Криволинейная поверхность, гранная поверхность, нормаль к поверхности, линейный каркас, тонированное изображение, отсек плоскости

Введение

В современных системах автоматизированного проектирования различной направленности, применяются трехмерные модели поверхностей различных объектов [1-3]. Часто, криволинейные поверхности заменяются на поверхности, состоящие из отсеков плоскостей – гранные поверхности. Это позволяет значительно упростить методы расчета различных параметров поверхности. При такой аппроксимации криволинейной поверхности необходимо, чтобы полученная гранная поверхность имела, по возможности, геометрические характеристики наименьшим образом отличающиеся от соответствующих параметров исходной криволинейной поверхности. Поскольку нормаль поверхности является одной из важнейших характеристик, в статье рассмотрено отклонение нормалей заданной поверхности, и аппроксимирующей ее гранной поверхности, построенной методом триангуляции.

Аппроксимация криволинейной поверхности

Одним из самых распространенных способов аппроксимации криволинейных поверхностей гранными является метод триангуляции [4-5]. Пусть задана поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$. Триангуляционную сеть можно построить следующим образом. Возьмем на поверхности сеть с шагом параметров Δu и Δv . Рассмотрим отсек поверхности ограниченный линиями $\vec{r} = \vec{r}(u_i, v)$, $\vec{r} = \vec{r}(u_i + \Delta u, v)$, $\vec{r} = \vec{r}(u, v_j)$, $\vec{r} = \vec{r}(u, v_j + \Delta v)$, где u_i , v_j – некоторые фиксированные значения соответствующих параметров. Обозначим эти линии через l_i , l_{i+1} , m_j , m_{j+1} , соответственно (рис. 1). Отсек A_{ij} , A_{i+1j} , A_{i+1j+1} , A_{ij+1} ,

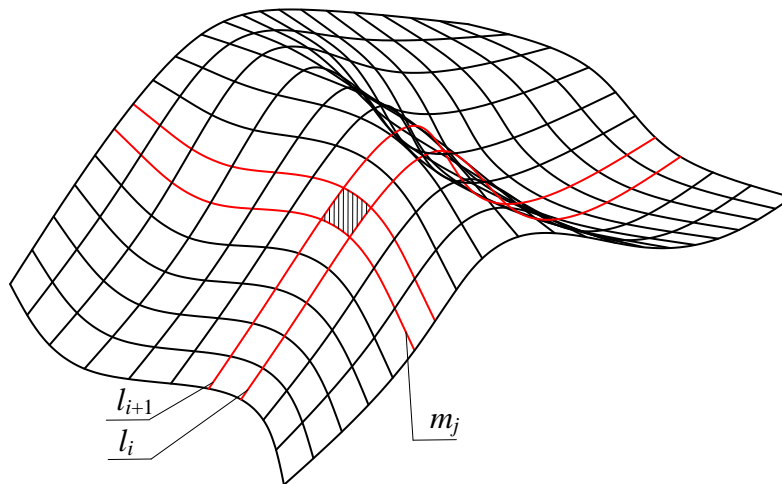


Рис. 1. – Заданная криволинейная поверхность

является пространственным криволинейным четырехугольником (рис. 2). Заменяем стороны четырехугольника хордами. Если расстояния между точками небольшие, то длина хорды будет не сильно отличаться от длины отрезка линии. Аппроксимируем отсек двумя треугольниками $\Delta A_{ij}A_{i+1j}A_{i+1j+1}$ и $\Delta A_{ij}A_{i+1j+1}A_{ij+1}$. Векторные уравнения плоскостей треугольников [6]:

$$\vec{r}(p, q) = \vec{R}_{ij}^A + \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j}}p + \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j+1}}q, \quad (1)$$

$$\vec{r}(p', q') = \vec{R}_{ij}^A + \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j+1}}p' + \overrightarrow{A_{ij}A_{ij+1}}q'. \quad (2)$$

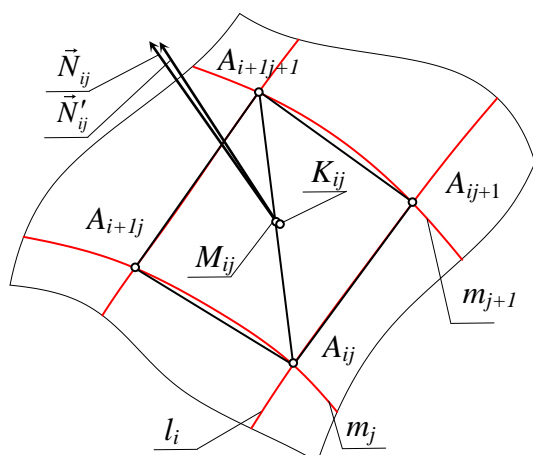


Рис. 2. – Аппроксимация отсека

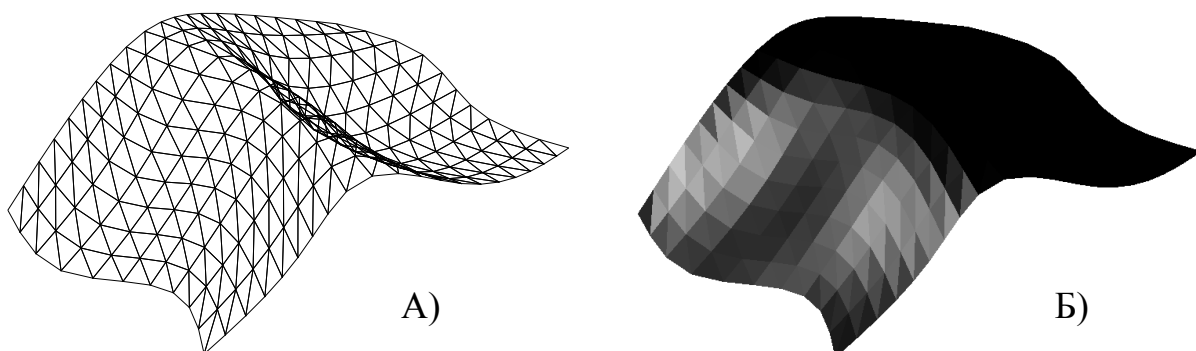


Рис. 3. – Аппроксимация поверхности. А) – линейный каркас; Б) –
 тонированное изображение

Выполнив аналогичные действия для каждого отсека заданной поверхности, получим ее аппроксимацию гранной поверхностью (рис. 3).

Определим в точке поверхности M_{ij} , радиус-вектор которой $\vec{R}_{ij}^M = \vec{r}(u_i + \Delta u / 2, v_j + \Delta v / 2)$, вектор нормали [7]:

$$\vec{N}_{ij} = \vec{r}_u(u_i + \Delta u / 2, v_j + \Delta v / 2) \times \vec{r}_v(u_i + \Delta u / 2, v_j + \Delta v / 2), \quad (3)$$

где $\vec{r}_u(u_i, v_j) = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial u}$, $\vec{r}_v(u_i, v_j) = \frac{\partial \vec{r}(u, v)}{\partial v}$, « \times » – обозначает векторное

произведение.

Найдем вектор нормали гранной поверхности в точке K_{ij} , находящейся на минимальном расстоянии от точки M_{ij} . Построим в точке M_{ij} прямую с направляющим вектором \vec{N}_{ij} (3), ее уравнение имеет вид [6]:

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_{ij}^M + \vec{N}_{ij}t. \quad (4)$$

Построим точку пересечения прямой (4) с гранной поверхностью (K_{ij}). Здесь возможны два варианта:

1) Точка принадлежит треугольнику (1), в этом случае, для определения K_{ij} , решаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R}_{ij}^M + \vec{N}_{ij}t; \\ \vec{r} = \vec{R}_{ij}^A + \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j}}p + \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j+1}}q, \end{cases}$$

вектор нормали равен:

$$\vec{N}'_{ij} = \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j}} \times \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j+1}}.$$

2) Точка принадлежит треугольнику (2), тогда, для определения точки, имеем систему:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{R}_{ij}^M + \vec{N}_{ij}t; \\ \vec{r} = \vec{R}_{ij}^A + \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j+1}}p' + \overrightarrow{A_{ij}A_{ij+1}}q', \end{cases}$$

вектор нормали:

$$\vec{N}'_{ij} = \overrightarrow{A_{ij}A_{i+1j+1}} \times \overrightarrow{A_{ij}A_{ij+1}}.$$

Максимальное отклонение векторов нормалей \vec{N}_{ij} и \vec{N}'_{ij} , для поверхности, приведенной на рис. 3, составило $10,5306^\circ$, минимальное – $0,0460^\circ$, среднее – $2,7703^\circ$. Отклонение точки M_{ij} от K_{ij} : максимальное – $17,1405$, минимальное – $0,0047$ мм, среднее – $4,8813$.

Рассмотрим погрешности, возникающие в связи с приведенными выше отклонениями параметров при решении задач геометрической оптики или геометрической акустики. Пусть задан точечный источник излучения S . Определим точку P , находящуюся на отраженном от поверхности в точке M луче, на заданном расстоянии d от нее (рис. 4). Согласно законам отражения

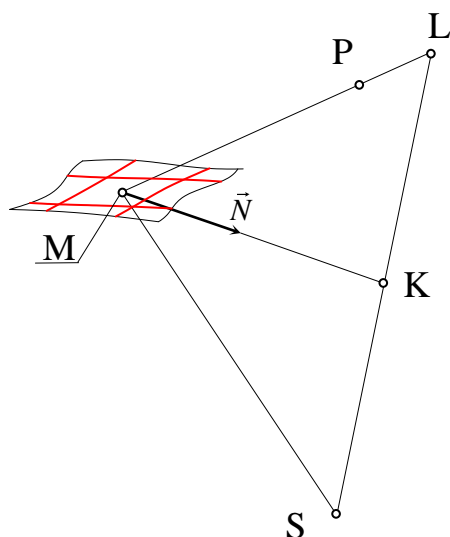


Рис. 4. – Определение точки падения
отраженного луча

[8-9], падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости и составляют с нормалью, в точке падения одинаковые углы $\angle SMK = \angle KML$. Найдем точку K , как точку пересечения прямой MK с плоскостью перпендикулярной ей и проходящей через источник S . Для этого решим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \vec{r} = M + \vec{N}t; \\ \vec{r} \square \vec{N} = 0, \end{cases}$$

где « \square » - обозначает скалярное произведение векторов. Радиус-вектор точки L равен $\vec{R}_{ij}^L = \vec{R}^S + 2\vec{SK}$, поскольку $|SK| = |KL|$, \vec{R}^S – радиус-вектор источника.

Следовательно, радиус-вектор искомой точки $\vec{R}_{ij}^P = \vec{R}^M + d \frac{\vec{ML}}{|\vec{ML}|}$.

При выполнении расчета, для заданной криволинейной поверхности и аппроксимирующей ее методом триангуляции гранной поверхности, получено максимальное отклонение – 489,0894 мм, минимальное – 3.9841 мм, среднее – 105,5562 мм.

Алгоритмы расчета разработаны в среде *ObjectARX* для *AutoCAD* [10-11] на языке *Visual C++* [12].

Вывод

Проведенные исследования показали, что данный метод дает хорошие результаты при визуализации поверхности (рис. 4), расчете прочностных параметров и др., но в задачах геометрической оптики и геометрической акустики, возникают значительные погрешности за счет отклонения векторов нормали, в заданных точках поверхности, следовательно, для аппроксимации поверхностей такого рода данный метод мало пригоден.

Литература

1. Rogers D.F., Procedural elements for computer graphics. McGraw-Hill, New York, 1998, 717p.
2. Rogers D.F., Adams J.A. Mathematical elements for computer graphics. McGraw-Hill, New York, 1990, 635p.
3. Будьков В.А., Гайдуков Н.С., Замятин А.В. Типы трехмерных моделей в системах компьютерной графики // Всероссийская (национальная) научно-практическая конференция «Актуальные проблемы науки и техники». Ростов-на-Дону, 2023. С. 306-307.
4. Замятин А.В., Замятина Е.А. Алгоритм построения развертки поверхностей // Инженерный вестник Дона. 2012. № 4-2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233/.
5. Семёнов А.Д., Никиткин А.С., Авдеева О.В. Определение режимов генератора технологических импульсов для электроэрозионного профилирования алмазных шлифовальных кругов // Инженерный вестник Дона. 2012. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/826/.
6. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 512 с.

7. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. — 176 с.
8. Ландсберг Г.С. Оптика. М: Наука, 2003. – 848 с.
9. Лепендин Л.Ф. Акустика. М: Высшая школа, 1978. – 448 с.
10. Полищук Н.Н. AutoCAD 2007. СПб: БХВ – Петербург, 2008.
11. Полищук Н.Н. AutoCAD: разработка приложений, настройка и адаптация. СПб.: БХВ – Петербург, 2006, 992 р.
12. Секунов Н.Ю. Visual C++ Визуальная среда программирования. СПб. БХВ – Петербург, 1999. – 960 с.

References

1. Rogers D.F., Procedural elements for computer graphics. McGraw-Hill, New York, 1998, 717p.
 2. Rogers D.F., Adams J.A. Matematical elements for computer graphics. McGraw-Hill, New York, 1990, 635p.
 3. Bud'kov V.A., Gajdukov N.S., Zamjatin A.V. Vserossijskaja (nacional'naja) nauchno-prakticheskaja konferencija «Aktual'nye problemy nauki i tehniki». Rostov-na-Donu, 2023, pp. 306-307.
 4. Zamjatin A.V., Zamjatina E.A. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. № 4-2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p2y2012/1233/.
 5. Semjonov A.D., Nikitkin A.S., Avdeeva O.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2012. № 2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2012/826/.
 6. Aleksandrov P. S. Kurs analiticheskoy geometrii i linejnoy algebry [Analytical Geometry and Linear Algebra course]. Sankt-Peterburg: Lan', 2022, 512 p.
 7. Pogorelov A. V. Differencial'naja geometrija [Differential geometry]. М.: Nauka, 1974, 176 p.
 8. Landsberg, G.S. Optika [Optics]. М: Nauka, 2003, 848 p.
 9. Lependin, L.F. Akustika [Acoustics]. М: Vysshaja shkola, 1978, 448 p.
-



10. Polishhuk N.N. AutoCAD 2007 [AutoCAD 2007]. SPb.: BHV, Peterburg, 2008.
11. Polishhuk N.N. AutoCAD: razrabotka prilozhenij, nastrojka i adaptacija [AutoCAD: application development, configuration and adaptation]. SPb.: BHV, Peterburg, 2006, 992 p.
12. Sekunov N.Ju. Visual C++ Vizual'naja sreda programmirovaniya [Visual C++ Visual Programming Environment]. SPb.: BHV, Peterburg, 1999, 960 p.

Дата поступления: 14.03.2024

Дата публикации: 22.04.2024